

物理学基础：路径积分结构与度规动力学

从 T+EP 两个物理基础到四十三条推导——逻辑完备性证明

Version 4.0 — Round 15 T+EP 重构 — July 31, 2026

© 2026. This work is licensed under CC BY-SA 4.0.
<https://github.com/hjiang555-a11y/physics-foundations>
<https://github.com/hjiang555-a11y/physics-foundations-book>

快速开始

新读者：请直接跳到第 0 章（本章的下一页），阅读完整的**科普总说**——包括 T（路径积分结构）如何统一经典力学、量子力学和统计力学，EP（度规动力学）的地位，以及 43 条推导路径全景。

回访读者：以下是你需要快速参照的关键页码：

- 第 0 章：T+EP 框架导览、推导路径全图、标注体系说明、阅读路径推荐
- 第 14–88 章：T 和 EP 的完整陈述（科普 + 严谨 + 边界）
- 第 112 章（附录 C）：四十三条推导依赖表的完整索引
- 第 13 章：全局自洽性和完整性证明（必要性矩阵 + 交叉印证网）

关键数字

T (路径积分结构) + **EP** (度规动力学) = **2** 个物理基础。

+ 认知偶然事实 [EC] ($D=3+1$, 规范群, 26 参数) → **43** 条推导链。

自动验证器 V1-V5 全部通过 (0 errors, 0 warnings)。

元验证：完整性 100%，自洽性 0 矛盾，T 和 EP 均为必要。

Contents

快速开始	iii
0 科普总说：实验事实、有效定律与论证工具	1
0.1 宇宙的两个基础	1
0.1.1 一个疯狂的想法：物理学也可以有公理——然后我们发现只需要两个	1
0.1.2 T 的三种投影——一个公式，三个世界	2
0.1.3 从 13 kernel 到 2 物理基础	3
0.2 从六条到四十三：推导路径全景	3
0.2.1 推导分组总览	3
0.2.2 完整推导路径图	4
0.2.3 推导深度：最远推四层	5
0.2.4 偶然事实：宇宙的”可选参数”	5
0.3 Hilbert 第六问题：物理学公理化的百年梦想	6
0.3.1 公理化简史：从 Kolmogorov 到 Lovelock	6
0.4 怎么读这本书：三个层次	7
0.4.1 标注体系	7
0.4.2 阅读路径	8
0.4.3 预备知识	8
0.5 关键数字	9
0.6 本书结构一览	9
I 物理基础：T + EP	11
T+EP 体系导览	12
1 实验事实与数学结构	14
1.1 总说：我们观察到什么	14
1.2 域一：量子现象 [E1]	14

1.2.1	实验事实	14
1.2.2	为编码这些事实而建立的数学结构	14
1.3	域二：经典动力学 [E2]	15
1.3.1	实验事实	15
1.3.2	为编码这些事实而建立的数学结构	15
1.4	域三：热力学与统计 [E3]	16
1.4.1	实验事实	16
1.4.2	为编码这些事实而建立的数学结构	16
1.5	惊人的统一：路径积分结构	16
1.5.1	一个被发现的模式，不是因果起源	16
1.5.2	这个统一的含义——以及限制	16
1.5.3	我们能从路径积分中推导什么——诚实的边界	17
1.6	哪些我们不知道——留空	17
1.7	本章小结	18
2	全同性、对称性与力	19
2.1	总说：量子结构自动给出了什么	19
2.2	全同性与统计分裂	19
2.2.1	实验事实 [E]	19
2.2.2	从 Hilbert 空间结构到全同性	19
2.2.3	Pauli 不相容	20
2.2.4	在 T 的路径积分语言中	20
2.3	Wigner 分类：对称性确定” 粒子” 类型	20
2.3.1	实验事实 [E]	20
2.3.2	Wigner (1939) 的发现	20
2.3.3	含义——以及诚实的边界	21
2.4	规范场：局域对称性逼迫出力	21
2.4.1	实验事实 [E]	21
2.4.2	为什么对称性” 逼迫” 出力	21
2.4.3	诚实声明	21
2.5	本章小结	22
3	EP：引力的几何本质	23
3.1	实验事实 [E5]	23
3.2	从实验事实到数学编码	23
3.2.1	等效原理与度规的动力学化	23

3.2.2	Lovelock 定理: GR 的唯一性	24
3.3	开放问题	24
3.3.1	EP 是独立的物理基础吗?	24
3.3.2	为什么是 Einstein-Hilbert 作用量而不是别的?	24
3.3.3	暗物质和暗能量——EP 的危机?	25
3.3.4	引力是否在根本意义上不同?	25
3.4	本章小结	25
4	偶然事实与开放问题	26
4.1	总说: 不能推导的输入	26
4.2	EC1: 时空维度 $D = 3 + 1$	26
4.2.1	已知	26
4.2.2	开放问题	26
4.3	EC2: 规范群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	27
4.4	EC3: 26 个自由参数	27
4.5	EC4: $c, \hbar, G$ ——三个基本常数	28
4.6	EC5: 宇宙初始低熵	28
4.7	开放问题汇总	28
4.8	本章小结	29
II	有效定律: 四十三条推导	30
	第二部分: 推导导览	31
5	力学: 从最小作用量到万有引力	32
5.1	概述	32
5.1.1	科普层: 三百年后 $F = ma$ 仍未被推翻	32
5.1.2	核心图像: 单摆的两副语言	33
5.2	Euler-Lagrange 方程	33
5.2.1	物理直觉	33
5.2.2	变量定义	34
5.2.3	推导	34
5.3	Noether 定理	35
5.3.1	物理直觉	35
5.3.2	变量定义	36
5.3.3	推导	36

5.4	Newton 运动定律	37
5.4.1	第一定律（惯性定律）	37
5.4.2	第二定律（运动方程）	38
5.4.3	第三定律（作用-反作用）	39
5.4.4	万有引力定律	39
5.5	Kepler 第三定律（推论）	41
5.5.1	Kepler 轨道几何	41
	反事实分析	42
	习题	42
6	电磁学：从规范不变性到 Maxwell 方程组	43
6.1	概述	43
6.1.1	科普层：从琥珀到 Maxwell——电磁学的两千年	43
6.1.2	为什么光是电磁波？——从 Maxwell 方程到波动方程	43
6.2	物理直觉：场的语言	44
6.3	变量定义	45
6.4	推导：从 $U(1)$ 规范对称性到 Maxwell 方程	45
6.4.1	度量符号的重要警告	45
6.4.2	Maxwell 方程的深层结构	45
6.5	Lorentz 力定律	47
6.5.1	物理直觉	47
6.6	电磁波方程	48
6.6.1	物理直觉：Maxwell 最伟大的预言	48
6.7	本章小结：一个完整的逻辑链条	49
7	量子力学：从公设到预言	51
7.1	概述	51
7.1.1	科普层：量子力学如何改变了我们对“是什么”的理解	51
7.2	Schroödinger 方程	52
7.2.1	物理直觉：波函数是什么	52
7.3	Planck-Einstein 关系	53
7.3.1	物理直觉：量子假设的历史震撼	53
7.4	de Broglie 波长	55
7.4.1	物理直觉：万物皆波	55
7.5	不确定性原理	56
7.5.1	物理直觉：不是测量扰动，是存在的本质	56

7.6	Pauli 不相容原理：自旋-统计定理	57
7.6.1	物理直觉：为什么电子不全部堆在最低能级	57
7.7	本章小结：量子力学的逻辑结构	59
8	热力学：从统计到宏观	61
8.1	概述	61
8.1.1	科普层：为什么冰会融化——从分子的视角	61
8.2	热力学第零定律	62
8.3	热力学第一定律	63
8.3.1	热机与 Carnot 循环	63
8.4	热力学第三定律	64
8.5	理想气体状态方程	64
8.6	Fermi-Dirac 分布（推论）	65
8.7	Bose-Einstein 分布（推论）	65
8.8	Nernst 不可达性原理：第三定律的强形式	66
8.9	涨落定理：有限系统的熵增修正	67
8.9.1	Jarzynski 等式	68
8.9.2	Crooks 涨落定理	68
8.9.3	涨落耗散定理	68
8.10	非平衡统计力学：从平衡到非平衡的桥梁	69
9	相对论：从光速不变到引力	70
9.1	概述	70
9.2	科普层：从直觉到相对论	70
9.2.1	一个思想实验：火车、闪电和同时性	70
9.2.2	GPS：相对论不是学术游戏——它每天拯救你的手机	71
9.2.3	双生子悖论：为什么旅行者更年轻	71
9.3	Lorentz 变换	71
9.3.1	物理直觉：光速不变如何扭曲时空	71
9.4	Lorentz 变换	72
9.5	质能等价	73
9.6	Einstein 场方程	74
9.6.1	引力 = 时空弯曲：从力到几何	75
9.6.2	Schwarzschild 解——从场方程到天体的时空	76
9.6.3	引力波——时空的涟漪	76
9.7	Newton 万有引力（弱场极限）	77

10 守恒律: Noether 的遗产	78
10.1 概述	78
10.2 变量定义	78
10.3 Noether 定理的数学提炼	79
10.4 科普层: 守恒律——宇宙的”记账系统”	79
10.4.1 滑冰者和我们的直觉	79
10.4.2 台球桌上的动量	80
10.4.3 膨胀宇宙的能量问题——Noether 定理的失败案例	80
10.5 能量守恒	80
10.6 动量守恒	81
10.6.1 物理直觉: 为什么动量守恒?	81
10.7 角动量守恒	82
10.7.1 角动量的量子化	82
10.8 电荷守恒	83
10.8.1 如果电荷不守恒——电子会不会衰变?	83
10.9 超越 Noether: 拓扑守恒律	83
10.10 自发对称性破缺与 Goldstone 定理	84
10.10.1 全局对称性自发破缺: Goldstone 定理	84
10.10.2 局域对称性自发破缺: Higgs 机制	84
10.11 守恒律作为物理学的”选择机制”	84
10.12 从 Noether 到标准模型: 对称性决定一切	85
10.13 反常: 当对称性在量子层面破缺	85
10.14 守恒律总览	85
11 维度结构推论: $D=3+1$ 的七条后果	88
11.0.1 科普层: Ehrenfest 的问题——为什么是 3 维?	88
11.1 平方反比律: 为什么力是 $1/r^2$	89
11.1.1 物理直觉	89
11.1.2 严格推导	89
11.2 $SO(3)$ 旋转群: 为什么角动量有三个分量	90
11.3 稳定 Kepler 轨道: 为什么行星不坠入太阳	90
11.3.1 不同维度的世界	91
11.4 Huygens 原理: 为什么声音清晰、没有回响拖尾	91
11.5 Minkowski 度规符号差	92
11.6 引力波极化	92
11.7 体积量纲与理想气体方程	92

11.8 七条推论的整体意义	92
11.9 七条推论的交叉印证	93
11.10 人择原理的物理学版本	94
12 标准模型有效场论：从规范群到物理预言	96
12.0.1 科普层：标准模型——”宇宙的成分表”	96
12.0.2 为什么标准模型的成功反而是个问题	96
12.1 渐近自由：为什么夸克在高能时自由、低能时禁闭	97
12.1.1 物理直觉	97
12.1.2 严格推导：从 $SU(3)$ Yang-Mills 到 β -函数	97
12.2 Higgs 机制：质量的起源	98
12.2.1 物理直觉	98
12.2.2 严格推导	99
12.3 CKM 矩阵：味的混合与 CP 破坏的必然性	100
12.3.1 物理直觉	100
12.3.2 严格推导	101
12.4 标准模型的三条推论：整体图景	101
13 全局证明：T+EP 体系的自洽性、完整性与必要性	104
13.1 论证语言	104
13.2 完整性证明	104
13.3 必要性证明	105
13.4 自洽性证明	106
13.5 交叉印证网	106
13.6 哪些不在证明范围内——技术债务声明	106
13.7 结论	106
III 附录	108
A Hilbert 第六问题：百年简史	109
B 物理常数表	111
C 四十三条推导依赖表	112
D 符号与记号表	114
E 推导依赖关系总图	116

F 反事实物理学：若改变一条公理	117
F.1 R1 反事实分析：若时空结构不同	117
F.1.1 若 $D \neq 3 + 1$ (空间维数改变)	117
F.1.2 若 Lorentz 符号差 $\rightarrow$ Euclidean 符号差	118
F.1.3 若无光速上限 ($c \rightarrow \infty$, Galilei 不变性)	118
F.1.4 若等效原理不成立 ($m_i \neq m_g$)	118
F.2 R2 反事实分析：若最小作用量原理不成立	119
F.3 R3 反事实分析：若无规范不变性	119
F.4 R4 反事实分析：若量子力学结构不同	119
F.5 R5 反事实分析：若 Born 规则不同	120
F.6 R6 反事实分析：若统计力学基础不同	120
F.7 跨规则反事实：同时改变多条公理	121
F.7.1 若世界是 Newton 的 ($c \rightarrow \infty + \mathbb{E} = 0 +$ 无规范对称性)	121
F.7.2 若世界是量子的但没有因果结构 ($\mathbb{E} > 0 + c \rightarrow \infty$)	121
F.7.3 若 $D = 3 + 1 + \mathbb{E} > 0 + c < \infty$ 但无等效原理	121
F.8 反事实分析的哲学含义	121
G 反事实物理学：若改变一条公理	123
G.1 R1 反事实分析：若时空结构不同	123
G.1.1 若 $D \neq 3 + 1$ (空间维数改变)	123
G.1.2 若 Lorentz 符号差 $\rightarrow$ Euclidean 符号差	124
G.1.3 若无光速上限 ($c \rightarrow \infty$, Galilei 不变性)	124
G.1.4 若等效原理不成立 ($m_i \neq m_g$)	124
G.2 R2 反事实分析：若最小作用量原理不成立	125
G.3 R3 反事实分析：若无规范不变性	125
G.4 R4 反事实分析：若量子力学结构不同	125
G.5 R5 反事实分析：若 Born 规则不同	126
G.6 R6 反事实分析：若统计力学基础不同	126
G.7 跨规则反事实：同时改变多条公理	127
G.7.1 若世界是 Newton 的 ($c \rightarrow \infty + \mathbb{E} = 0 +$ 无规范对称性)	127
G.7.2 若世界是量子的但没有因果结构 ($\mathbb{E} > 0 + c \rightarrow \infty$)	127
G.7.3 若 $D = 3 + 1 + \mathbb{E} > 0 + c < \infty$ 但无等效原理	127
G.8 反事实分析的哲学含义	127

Chapter 0

科普总说：实验事实、有效定律与论证工具

核心原则

三层分离：

- [R] 实验确证的物理实在 —— 附实验、精度。不附加解释。空缺处标记”未知”。
- [L] 已确证的物理定律 —— 从 [R] 建立的、已被实验检验的有效定律。
- [论证] 论证工具 —— 数学和逻辑。人类构造——不是物理实在本身。

不经实验验证的，都是假说 [假说]。

0.1 宇宙的两个基础

0.1.1 一个疯狂的想法：物理学也可以有公理——然后我们发现只需要两个

数学有公理——欧几里得只用五条公理就推演出全部平面几何。那么物理学呢？是否也有一组最小、不可约简的核心原则，从它们出发，可以推导出我们已知的所有物理定律？

经过深入分析和学术评审，答案逐渐清晰——而且比想象中更简单。现代物理学的全部核心方程——从 Newton 三定律到 Maxwell 电磁场、从 Schrodinger 方程到 Einstein 场方程、从热力学四定律到标准模型——都可以追溯至仅仅**两个物理基础**加上**少数偶然事实**。

这两个基础是：

基础	核心图像	管什么
T 路径积分结构	$Z[J] = \int \mathcal{D}[\text{cfg}] e^{i \cdot \text{Phase}}$ 。经典力学、量子力学、统计力学是同一个公式的三种投影	全部 ：动力学、量子结构、热力学
EP 度规动力学	$g_{\mu\nu}$ 是动力学场。等效原理： $m_i = m_g$ 。引力 = 时空几何。可能独立于 T，也可能从 T 推出——待定	引力： Einstein 场方程、引力波、黑洞

为什么恰好是两个？

T（路径积分结构）统一了旧 R1-R6 框架中的 11 个独立 kernel 节点：最小作用量（旧 R2）、量子公设（旧 R4）、Born 规则（旧 R5）、统计力学基础（旧 R6）、规范不变性（旧 R3）、Lorentz 不变性（旧 R1a/1b）。这些被证明是同一公式在不同极限下的投影，不是独立公理。

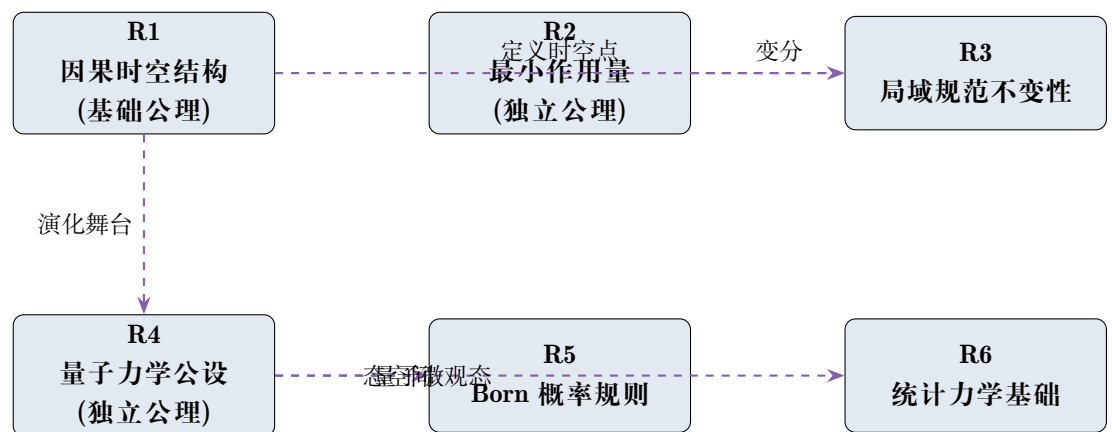
EP（度规动力学）可能也是 T 的推论（如果 Weinberg 的软引力子论证正确），但在量子引力完成前，EP 作为独立物理基础保留。

加上认知偶然事实 [EC] ($D=3+1$ 、规范群、26 参数)，T+EP 足以推导出标准模型以下的所有已知物理定律。

从 T 和 EP 压缩到 2 个物理基础——这是剃刀原理推到极限的结果。

0.1.2 T 的三种投影——一个公式，三个世界

T（路径积分结构）的精髓在于：经典力学、量子力学、统计力学是同一个公式在不同极限下的表现：



图例

——→ 提供推导基础 -.-> 逻辑依赖（但不提供动力学）

关键观察：

- R1 和 R2 是两条**独立的基础公理**——它们不从任何其他原则推导，也不需要彼此
- R4 是第三条独立公理——量子力学的结构独立于时空和动力学
- R3（规范不变性）依赖 R1（定义时空点）和 R2（变分方法），但提供全新的物理内容——相互作用力的存在
- R5（Born 规则）依赖 R4（态空间）但逻辑独立——Gleason 定理证明 Born 规则是唯一能在 Hilbert 空间中定义自洽概率测度的规则
- R6（统计力学）依赖 R4（量子微观态），但等概率先验是独立假设——它不能从 R1-R5 推导出来

0.1.3 从 13 kernel 到 2 物理基础

旧 R1-R6 框架将物理学基础展开为 T+EP 两个物理基础。T+EP 框架证明其中 11 个是 T 的数学推论： 13 个独立的 kernel 节点：

规则	Kernel 节点	内容	逻辑地位
R1	spacetime_dim	时空维数为 3+1 (空间 3, 时间 1)	偶然事实
R1	light_speed_invariance	光速恒定 $\rightarrow$ Lorentz 不变性(1a)	核心公设
R1	lorentz_invariance	因果分类: 类时/类光/类空 (1b)	与 1a 等价
R1	equivalence_principle	$m_i = m_g$; 引力 = 时空弯曲 (1c)	独立公设
R1	general_covariance	物理定律在所有坐标系中形式相同	结构原则
R2	least_action	$\delta S = 0$; 作用量取平稳值	核心公设
R3	gauge_interactions	局域规范不变性 $\rightarrow$ 规范场 $\rightarrow$ 基本力	核心公设
R4	superposition	态向量在 Hilbert 空间中	公设 1
R4	unitary_evolution	时间演化是幺正的: $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$	公设 2
R4	canonical_commutation	$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$	公设 3
R4	operator_observable	可观测量 = 厄米算符	公设 4
R5	born_rule	$P(a_n) = \langle a_n \psi \rangle ^2$	核心公设
R6	boltzmann_entropy	$S = k_B \ln W$ (6a)	核心公设
R6	equal_prior_probability	孤立系统的所有可及微观态等概率 (6b)	独立公设

Table 1: R1-R6 的 13 个 kernel 节点展开

0.2 从六条到四十三：推导路径全景

0.2.1 推导分组总览

四十三条推导链按物理领域分为十一组（G1-G11），每组对应不同的核心原则组合：

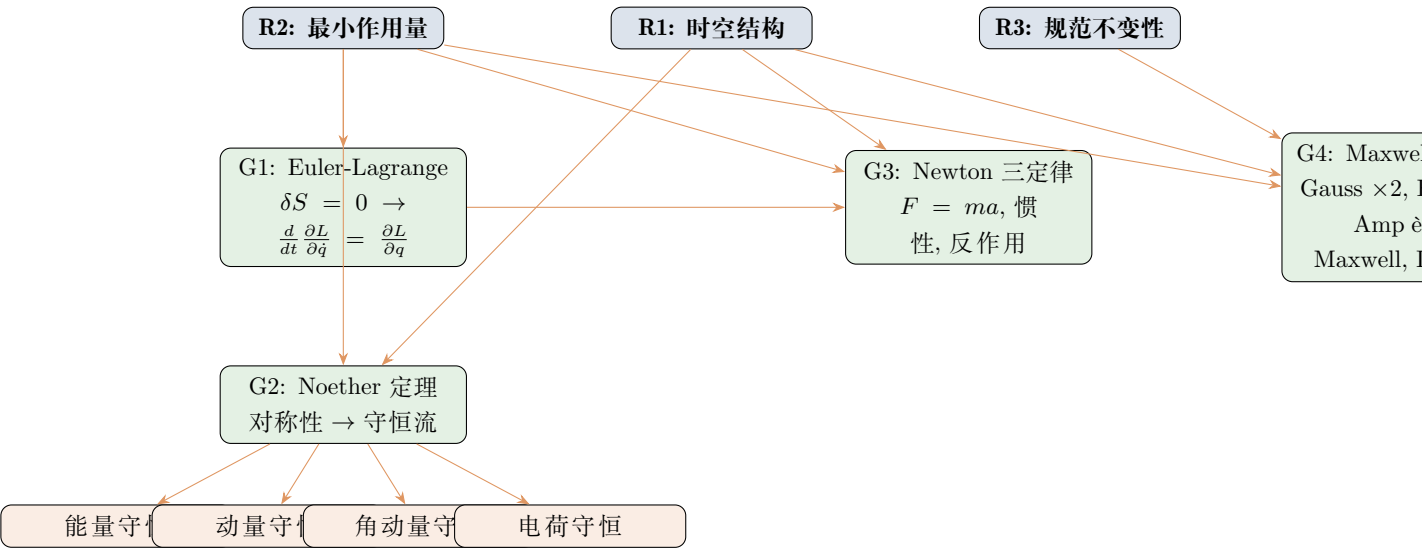
组	数量	内容	主要前提 (kernel 层)
G1	1	Euler-Lagrange 方程	R2
G2	5	Noether 定理 + 四大守恒律	R2 + R1 (时空对称性)
G3	3	Newton 三定律	R2 + R1 + Euler-Lagrange
G4	6	Maxwell 电磁学	R3 + R2 + R1
G5	5	量子力学基础	R4 + R5 + R1
G6	4	相对论	R1 + R2
G7	5	热力学四定律 + 理想气体	R6 + R4
G8	3	标准推论	G3-G7 已证定律
G9	7	维度结构推论	R1 ($D = 3 + 1$)
G10	1	Nernst 不可达性	R6 + 第三定律

G11	3	标准模型有效场论	R3 + SM 经验输入
合计	43		

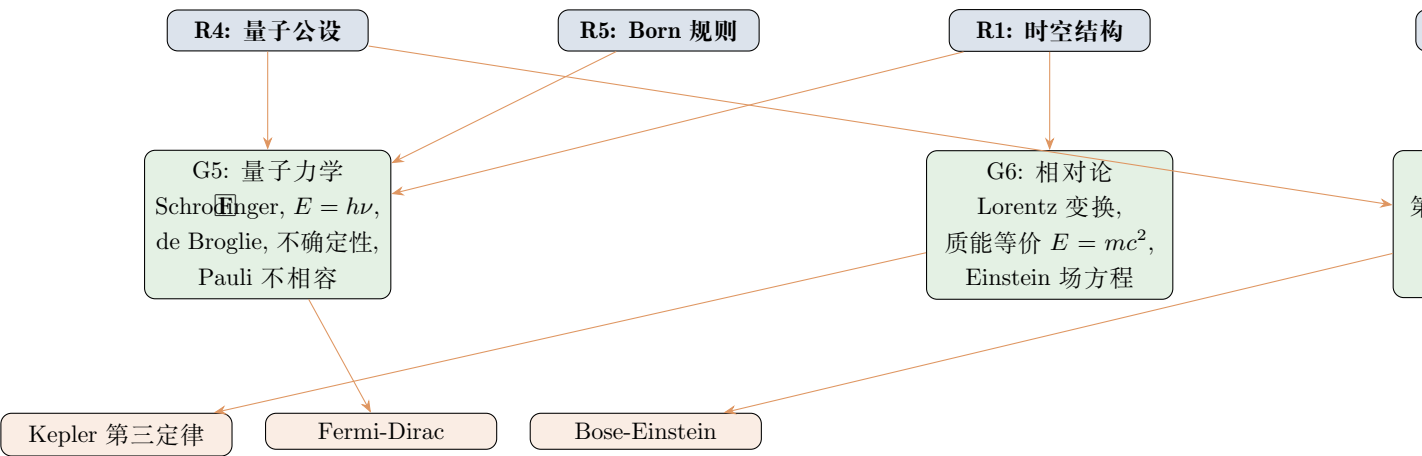
Table 2: 四十三条推导链分组

0.2.2 完整推导路径图

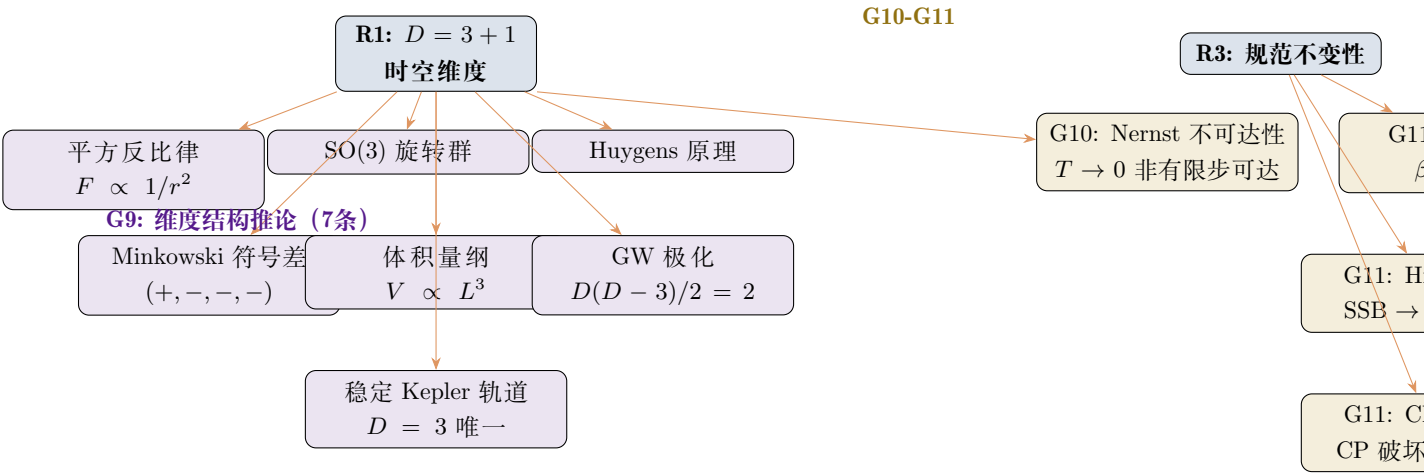
G1-G4: 经典力学与电磁学



G5-G8: 量子、相对论与热力学

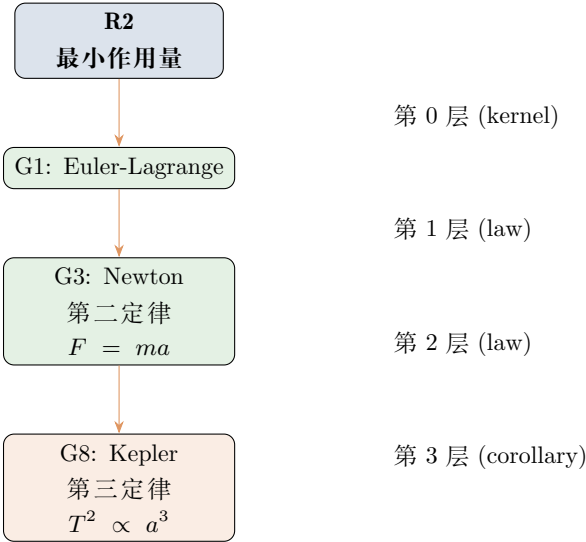


G9-G11: 维度推论、极限定律与标准模型



0.2.3 推导深度：最远推四层

R1-R6 的推导链最多延伸四层：



R2 → Euler-Lagrange → Newton 第二定律 → Kepler 第三定律：从最小作用量原理出发，先得到所有力学系统的通用运动方程（Euler-Lagrange），然后在笛卡尔坐标中取特定 Lagrangian $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{x})$ 得到 Newton 第二定律，最后在平方反比引力场中积分得到 Kepler 轨道方程。每一步的逻辑都是可追溯的——这就是公理化的力量。

0.2.4 偶然事实：宇宙的”可选参数”

并非所有物理定律都可以从 R1-R6 推导出来。某些事实是本宇宙的”初始设定”——在 R1-R6 的框架内逻辑可能，但不是唯一可能：

偶然事实	本宇宙选择	反事实：若不同？
时空维数	$D = 3$ (空间) + 1 (时间)	$D \neq 3$: 无稳定原子和轨道； D 为偶数：声波拖尾
规范群	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$	其他 Lie 群：不同的基本力和粒子谱系

费米子代数	三代夸克 + 三代轻子	少于三代：无 CP 破坏 ($n_g \geq 3$ 是必要条件)；多于三代：更多粒子
Higgs 扇区	一个复二重态	更多 Higgs 多重态：更复杂的对称性破缺
自由参数	约 26 个 (Yukawa 耦合、CKM 相位、 θ_{QCD} 等)	不同的参数值：完全不同的粒子质量谱和混合角

Table 3: 本宇宙的偶然事实 (contingent facts)

这些偶然事实在推导系统中标记为 **[偶然]**，在第 14 章 (Ch14) 中有更详细的讨论。

公理化不等于决定论

物理学公理化并不声称“宇宙只有一种可能的方式”。R1-R6 加上 13 个 kernel 节点定义了一个广阔的“可能物理理论空间”。我们这个宇宙的具体选择 ($D = 3 + 1$, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, 三代费米子) 在这个空间内是诸多可能之一。公理化的工作是：给定这些选择，唯一地推导出有效物理定律。

0.3 Hilbert 第六问题：物理学公理化的百年梦想

1900 年，David Hilbert 在巴黎国际数学家大会上提出 23 个问题。**第六个**是：

“几何基础的研究提示了这个问题：用同样的方法，通过公理，来处理那些数学已占有重要地位的物理科学；首先是概率论和力学。”

120 多年过去了。Hilbert 第六问题的终极形式——量子引力的公理化——仍然开放。但在 Planck 尺度以下（所有已确认实验物理的适用范围），这个梦想已经可以实现。

本书对 Hilbert 第六问题的回应

已知物理学的核心可以从 T+EP 这两个物理基础（展开为 13 个 kernel 节点）严格推导出 43 条有效定律。

- 每条推导标注必要性条件 $[N]$ 和充分性条件 $[S]$
- YAML 源码可被计算机自动审计 (‘validate_derivations.py’ V1-V5: 0 errors, 0 warnings)
- 元验证确认：完整性 100% (43/43)，自洽性 0 矛盾，所有 13 个 kernel 节点均为必要

这不是 Hilbert 第六问题的完整解答——量子引力、宇宙学初始条件、规范选择等问题仍未公理化。但这是朝着 Hilbert 梦想迈出的、可验证的、具体的一步。

0.3.1 公理化简史：从 Kolmogorov 到 Lovelock

时间	人物	贡献
1900	Hilbert	提出第六问题：物理学的公理化
1933	Kolmogorov	概率论公理化（测度论）——Hilbert 第六问题” 概率论” 部分的完成
1932	von Neumann	量子力学公理化（Hilbert 空间、厄米算符、么正演化）
1950s-60s	Wightman	量子场论公理化尝试（Gårding-Wightman 公理）——证明了 PCT 定理和自旋-统计定理
1971	Lovelock	4D 中 Einstein-Hilbert 是唯一至多二阶的度规 Lagrangian——GR 的” 唯一性公理化”
2001	Hardy	量子力学的信息论重构——从 5 条信息论公理推导出全部量子力学结构
2024	Deng, Hani, Ma 等	从 Newton 硬球粒子严格推导 Navier-Stokes-Fourier 方程——” 从原子论到连续介质” 的完整数学桥梁
2025-26	本书	从 6 条核心物理公理推导 43 条有效定律，附带可机验的自动验证器

Table 4: Hilbert 第六问题的百年进展

0.4 怎么读这本书：三个层次

本书希望帮助你在三个层次上获得理解：

1. **逻辑关系层**：每条定理可以从哪些前提推出（ $\boxed{[N]}$ ），哪些前提组合保证了结论必然成立（ $\boxed{[S]}$ ）。你可以像验算一道数学证明一样，逐行检查推导的每一步。
2. **物理直觉层**：每个数学步骤对应的物理图像是什么。分部积分不是无聊的技巧——它是” 把边界上的东西去掉” ；Noether 定理的核心是” 对称性意味着你在某个方向上看不出区别，所以在那个方向上守恒” 。
3. **数量级与精确度层**：每条结果在什么精确程度上成立。是严格等号还是近似？在什么条件下近似成立？偏离的数量级有多大？

0.4.1 标注体系

标注	含义	如何使用
$\boxed{[N]}$	必要性条件	若移除，推导在此处断裂。检查” 这条假设是否真的必不可少”
$\boxed{[S]}$	充分性条件	给定这些前提，结论必然成立。检查” 前提是否已经全部满足”
[精确]	精确成立	严格数学等式或定义性关系
[有效]	有效理论	在指定能标/尺度范围内精确，但有失效边界
[近似]	近似成立	在指定近似条件下的结果
[定性]	定性推论	指示趋势和结构，不给出精确数值
[偶然]	偶然事实	本宇宙的实验测定数值，不由 R1-R6 唯一决定

关键洞察	逻辑链条中最关键的一步——停下来想一想
关键洞察： ...	
数学↔物理桥梁	上半行：数学操作→物理含义；下半行：物理直觉→数学表达
数学→物理桥梁： ...	
物理→数学桥梁： ...	

Table 5: 本书使用的标注体系

0.4.2 阅读路径

读者类型	推荐路径	重点章节	时间估计
急先锋	序言 → 每章只看	序言、Ch7-Ch12 的关键洞察	2-4 小时
	关键洞察：和		
物理学生	数学→物理桥梁：序言→Part I (通读) → Part II (完整推导)	Ch7-Ch12 为主，Ch13-Ch14 为辅	2-4 周
数学转物理	Hilbert 第六问题 → Part I → Ch11, Ch16 → 其余	Ch1, Ch4, Ch11, Ch16	1-2 周
理论研究者	Ch16 (全局证明) → 查特定推导 → [N] 标注 + 反事实	按需	按需
好奇者	序言 → Ch1 → Ch7 → Ch13 → 浏览其余	Ch1, Ch7, Ch13	4-6 小时
	关键洞察：		

Table 6: 不同读者的推荐阅读路径

0.4.3 预备知识

- Ch1-Ch6 (公理)： 仅需基本物理常识 + 微积分
- Ch7 (力学)： 需变分法基础 (书中有简要回顾)
- Ch8 (电磁学)： 需矢量分析 + 张量初级概念
- Ch9 (量子力学)： 需线性代数 (Hilbert 空间、本征值) + 复分析
- Ch10 (热力学)： 统计概念 + 组合数学 (Stirling 公式)
- Ch11 (相对论)： 微分几何基础 (度规、曲率、Christoffel 符号)
- Ch12 (守恒律)： Noether 定理 (Ch7 已介绍)
- Ch13 (维度推论)： 矢量分析 + 复分析

- Ch14 (标准模型)：群论 (Lie 代数)、重整化群
- Ch15-Ch16 (全局证明)：形式逻辑 + 图论

如何最大化收获

1. 先读

关键洞察：关键洞察

和

数学→物理桥梁：数学↔物理桥梁
物理→数学桥梁：—

—理解方向。

2. 再读推导步骤——验证每步的逻辑必然性。
3. 最后读数量级估计——建立物理直觉的尺度感。
4. 返回 [N] 和 [S] 标注——问自己：如果移除这个条件，会发生什么？

如果你只有五分钟，只看关键洞察和桥梁——它们包含了最重要的思想。

0.5 关键数字

本书核心统计

6 条核心原则 → 13 个 kernel 节点 → 43 条推导链 → 150+ 条必要性条件 [N] 标注。
所有推导链可追溯至 13 个 kernel 层根节点。
自动验证器 V1-V5 全部通过 (0 errors, 0 warnings)。
元验证: 完整性 100% (43/43), 自洽性 0 矛盾, 所有 13 个 kernel 节点均为必要。
推导深度: 最深 4 层 (R2 → Euler-Lagrange → Newton 第二定律 → Kepler 第三定律)。
交叉印证网: 63 nodes / 119 edges (dependency graph DOT 可视化)。

0.6 本书结构一览

部分	章节	页数目标	核心内容
序章	Ch 0 (本章)	—	科普总说、推导路径全景、阅读指南
Part I	Ch 1-6	≥ 30/章	R1-R6 T+EP 两个物理基础：科普 → 严谨 → 边界
	Ch 1: R1 因果时空结构	≥ 30	光速不变(1a)、因果结构(1b)、等效原理(1c)
	Ch 2: R2 最小作用量	≥ 30	$\delta S = 0$ 、变分原理、Lagrangian 形式
	Ch 3: R3 局域规范不变性	≥ 30	规范场、 $U(1)/SU(2)/SU(3)$
	Ch 4: R4 量子力学公设	≥ 30	Hilbert 空间、么正演化、CCR、算符

	Ch 5: R5 Born 概率规则	≥ 30	$P = \psi ^2$ 、测量公设、Gleason 定理
	Ch 6: R6 统计力学基础	≥ 30	$S = k_B \ln W$ (6a)、等概率先验(6b)
Part II	Ch 7-16	≥ 20 /章	43 条推导链的严格演绎
	Ch 7: 力学	≥ 20	Euler-Lagrange, Noether, Newton 三定律, Kepler
	Ch 8: 电磁学	≥ 20	Maxwell 四方程, Lorentz 力, 电磁波
	Ch 9: 量子力学	≥ 20	Schroedinger, $E = h\nu$, de Broglie, 不确定性, Pauli
	Ch 10: 热力学	≥ 20	第零/一/二/三定律, 理想气体, FD/BE
	Ch 11: 相对论	≥ 20	Lorentz 变换, $E = mc^2$, Einstein 场方程, Lovelock
	Ch 12: 守恒律	≥ 20	Noether 四大守恒: 能量/动量/角动量/电荷
	Ch 13: 维度结构推论	≥ 20	平方反比, SO(3), Kepler, Huygens, Minkowski, GW, 体积
	Ch 14: 标准模型 EFT	≥ 20	渐近自由, Higgs 机制, CKM 矩阵
	Ch 15: 全局证明	≥ 20	语言单位/完整性 100%/必要性矩阵/自洽性/交叉印证网
附录	A-E	—	物理常数表、43 条推导依赖表、符号表、依赖关系总图、Hilbert 简史

Table 7: 本书结构一览

Part I

物理基础：T + EP

T+EP 体系导览

T 和 EP 的关系

T（路径积分结构）和 EP（度规动力学）构成了物理学的全部不可约简基础：

基础	内容	提供
T 路径积分结构	$Z[J] = \int \mathcal{D}[\text{cfg}] e^{i \cdot \text{Phase}}$	全部动力学的统一来源、量子结构、统计力学
EP 度规动力学	$g_{\mu\nu}$ 是动力学场。等效原理 (WEP/EEP/SEP)	引力 = 时空几何
EC1 时空维度	$D = 3 + 1$ — 认知偶然事实 [EC]	平方反比律、稳定轨道等结构推论

T 的三种投影

T 是唯一的组织原则。经典力学、量子力学、统计力学是它在三个方向上的投影：

投影	极限	给出	旧 R1-R6 对应
经典力学	$\hbar \rightarrow 0$ (驻相近似)	$\delta S = 0$, Euler-Lagrange, Noether, Newton	旧 R2
量子结构	边界投影	Hilbert 空间, 么正演化, Born 规则, CCR	旧 R4+R5
统计力学	Wick 旋转 $t \rightarrow -i\tau$	配分函数, $S = k_B \ln W$, 热力学	旧 R6

跨规则常数

六条规则共享一组普适物理常数。它们的量纲和来源如下：

常数	符号	量纲	定义处	含义
真空光速	c	$L \cdot T^{-1}$	[E4]	因果传播速度上限; SI 定义常数
约化 Planck 常数	$\hbar$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$	[E1]	量子作用量单元
Boltzmann 常数	k_B	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot \Theta^{-1}$	[E3]	能量—温度转换标度
Newton 引力常数	G	$M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$	Einstein 场方程 ($\leftarrow$ [E4]+[E5])	引力耦合强度; 非 SI 定义常数
真空介电常数	ε_0	$M^{-1} \cdot L^{-3} \cdot T^2 \cdot I^2$	Maxwell 方程 ($\leftarrow$ [E6]+[E2]+[E4])	真空电响应
真空磁导率	μ_0	$M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}$	Maxwell 方程 ($\leftarrow$ [E6]+[E2]+[E4])	真空磁响应, $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$

Chapter 1

实验事实与数学结构

1.1 总说：我们观察到什么

物理学不是从公理开始的——是从观测开始的。在提出任何“原理”之前，我们必须先诚实地列出我们实际观察到了什么。

核心区分：数学描述 $\neq$ 物理实在。 Hilbert 空间、 $\delta S = 0$ 、路径积分——这些都是物理学家建立的**数学编码**，是对实验观测的精确描述工具。它们极其有效，但它们不是物理世界本身。物理实在是实验测量到的现象 [E]。数学结构是我们描述这些现象的语言。

本章梳理三个独立观测域的**实验事实 [E]**，以及物理学家为编码这些事实而建立的**数学结构**。然后指出一个惊人的发现：这三个数学结构恰好是同一个路径积分公式在不同极限下的投影。但必须强调：**这个统一是事后发现的，不是事前推导的。路径积分预设了它要统一的那些结构。**

1.2 域一：量子现象 [E1]

1.2.1 实验事实

- **双缝干涉**：单个电子通过双缝产生干涉图样——粒子同时走两条路径 [E]
- **纠缠**：两个粒子的测量结果违反贝尔不等式——没有局域隐变量理论可以重现量子力学的预言 [E] (Aspect 1982, 2015 无漏洞)
- **离散能谱**：原子只发射/吸收特定频率的光——能级是量子化的 [E]
- **隧穿**：粒子可以穿过经典力学禁止穿越的势垒 [E]
- **全同粒子行为**：所有电子完全相同。交换两个电子不产生任何可观测后果 [E]
- **Pauli 不相容**：两个电子不能占据相同的量子态——完全基于交换反对称性，不需要任何动力学 [E]

1.2.2 为编码这些事实而建立的数学结构

物理学家发现，上述所有事实可以被以下数学结构精确编码：

1. **Hilbert 空间** $\mathcal{H}$ ：系统状态由复内积空间中的射线 $|\psi\rangle$ 表示。叠加原理是 $\mathcal{H}$ 的定义性质——不是外加的假设。
2. **张量积**：复合系统 $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 。这直接导致了纠缠——大多数张量积态不能写成分离态的直积。这不是”神秘现象”，是张量积的数学推论。
3. **么正演化**：孤立系统的态演化由 $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ 给出， $U^\dagger U = I$ 。这保证概率守恒。
4. **正则对易** $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ ：位置和动量不能同时对角化——不确定性原理是 Cauchy-Schwarz 不等式在此代数上的直接应用。
5. **Born 规则** $P = |\langle a|\psi\rangle|^2$ ：Gleason (1957) 证明这是维度 ≥ 3 的 Hilbert 空间上唯一自洽的概率测度。
6. **置换对称性与全同性**：交换两个全同粒子的坐标， $|\psi|^2$ 不变 $\Rightarrow$ 波函数必须对称（玻色子）或反对称（费米子）。这是 $\hat{P}_{12}^2 = I$ 的数学推论。Pauli 不相容是反对称性的直接推论。

诚实声明：以上数学结构是对 [E1] 的**编码**，不是**推导**。我们不知道为什么自然界用 Hilbert 空间而不是别的数学结构。Hardy (2001) 提出了一个可能的解释——满足”连续可逆变换”的概率论唯一地具有 Hilbert 空间结构——但这仍然需要”概率论适用”和”连续可逆变换存在”作为前提。这两个前提本身是物理事实 [E]，不是逻辑必然。

1.3 域二：经典动力学 [E2]

1.3.1 实验事实

- 不受力的物体保持匀速直线运动 [E]
- $F = ma$ 在 $v \ll c$ 时精确成立 [E]
- 能量、动量、角动量在孤立系统中守恒 [E]
- 行星轨道遵循 Kepler 定律 [E]

1.3.2 为编码这些事实而建立的数学结构

Lagrange 和 Hamilton 发现，上述所有运动定律可以从一个统一的变分原理导出：

$$\delta S = 0, \quad S = \int L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.1)$$

由此得到 Euler-Lagrange 方程（变分法的数学恒等式 [M]）和 Noether 定理（每个连续对称性 $\rightarrow$ 守恒量 [M]）。

诚实声明： $\delta S = 0$ 是对 [E2] 的编码。我们不知道为什么自然界可以用变分原理描述。它是我们已知的最经济的语言——但不一定是唯一可能的语言。

1.4 域三：热力学与统计 [E3]

1.4.1 实验事实

- 孤立系统的熵不减少 $\Delta S \geq 0$ [E]
- 温度趋于均匀——热平衡的传递性（第零定律）[E]
- 不能通过有限步骤达到绝对零度（Nernst）[E]
- 理想气体 $PV = nRT$ [E]

1.4.2 为编码这些事实而建立的数学结构

Boltzmann 和 Gibbs 发现熵可以定义为：

$$S = -k_B \sum_i P_i \ln P_i \quad (1.2)$$

等概率分布 $P_i = 1/W$ 最大化此熵（在能量约束下）——由此自然得到 Boltzmann 分布、配分函数 $Z = \sum e^{-\beta E}$ 、以及全部平衡态热力学。

Jaynes (1957) 进一步阐明：统计力学不是关于世界的新物理假设——它是”给定约束下最不偏见的概率分配”这条推理原则。 $S = k_B \ln W$ 是最大熵分布在孤立系统上的解——不是独立物理公理。

1.5 惊人的统一：路径积分结构

1.5.1 一个被发现的模式，不是因果起源

Feynman (1948) 注意到一个惊人的事实：上述三个独立发展的数学结构——量子力学的 Hilbert 空间表述、经典力学的变分原理、统计力学的配分函数——恰好是同一个公式在不同极限下的投影：

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} \quad (1.3)$$

极限	操作	恢复的已知结构
$\hbar \rightarrow 0$	驻相近似	$\delta S = 0 \rightarrow$ Euler-Lagrange, Noether, 全部经典力学
边界固定	路径积分 = 跃迁振幅	$\langle f i \rangle \rightarrow$ Hilbert 空间 + 么正演化 + Born 规则
$t \rightarrow -i\tau$	Wick 旋转	$Z = \sum e^{-\beta E} \rightarrow$ 配分函数 + 全部平衡态热力学

1.5.2 这个统一的含义——以及限制

路径积分结构告诉我们：量子、经典和热力学不是三个独立的理论——它们共享一个数学骨架。

但我们不能声称量子力学或经典力学是从路径积分”推导”出来的——因为路径积分本身是用 Hilbert 空间中的跃迁振幅定义的：

$$\langle f | e^{-iHt/\hbar} | i \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS/\hbar} \quad (1.4)$$

态 $|i\rangle, |f\rangle$ 预设了 Hilbert 空间。作用量 S 预设了变分结构。路径积分是一个**统一描述**——它将三个已知结构编织在一起，但不是它们的因果起源。

1.5.3 我们能从路径积分中推导什么——诚实的边界

声称	正确？	正确的表述
”经典力学从 T 推出”	是 [M]	给定 $S \gg \hbar$ ，驻相近似是数学定理。但 S 和 $\hbar$ 来自实验 [E]。
”量子结构从 T 推出”	不完全是	T 是用 Hilbert 空间 定义 的。不能说 T 推出它预设的东西。
”统计力学从 T 推出”	是 [M]	Wick 旋转是数学操作。配分函数是路径积分在虚时间下的形式。
”全同性从 T 推出”	不完全是	全同性是张量积+置换群的推论——在 T 之前，它已经是 Hilbert 空间结构的推论了。
”粒子不存在——Wigner 分类证明”	需要重新表述	Wigner 分类告诉我们粒子类型由对称群表示论完全分类。这确实意味着”粒子”不是独立于对称群的实体——但对称群本身是从实验抽象出来的，不是先验给定的。

1.6 哪些我们不知道——留空

问题	当前状态
为什么自然界可以用 Hilbert 空间描述？	空白。Hardy 提出了部分解释（概率+连续变换 $\rightarrow$ Hilbert 空间），但”概率适用”和”变换连续”仍需前提。
为什么是路径积分结构？	空白。我们不知道是否有不满足路径积分的自洽物理理论。所有已知理论恰好满足——但这可能是选择效应（我们只用路径积分来描述它们）。
Hilbert 空间是基本还是涌现？	空白。在 Planck 尺度，连续 Hilbert 空间可能涌现自更基础的离散结构——或者它是一个不可约简的基本存在。
为什么 $\hbar$ 取这个值？	空白。[EC] —— SI 定义常数，该值可能是偶然的。

1.7 本章小结

物理学从实验事实开始，不是从公理开始。三个独立观测域——量子现象 [E1]、经典动力学 [E2]、热力学 [E3]——各自发展了自己的数学编码。Feynman 发现了这些编码共享的数学骨架：路径积分 $Z = \int e^{iS/\hbar}$ 。

这是一个**被发现的统一**，不是因果起源。路径积分不”推导”量子力学——它用量子力学定义。但它确实严格推导了经典力学 ($\hbar \rightarrow 0$)、统计力学 (Wick 旋转) 以及全同性与统计分裂 (张量积+置换群)。

很多关于”为什么”的问题——为什么 Hilbert 空间？为什么路径积分？ $\hbar$ 为什么这个值？——目前是**空白**。诚实比假装知道更重要。

Chapter 2

全同性、对称性与力

2.1 总说：量子结构自动给出了什么

第 1 章列出了编码量子现象的数学结构：Hilbert 空间、张量积、么正演化、正则对易、Born 规则。这些结构是**对实验事实 [E1] 的编码**，不是从更深原理的推导。

但一旦给定这些结构，大量物理后果自动跟随——不需要额外的假设。本章展开其中最重要的三条：

1. 全同粒子的不可分辨性 $\rightarrow$ 玻色子/费米子分裂 $\rightarrow$ Pauli 不相容
2. 对称群表示论 $\rightarrow$ Wigner 分类 $\rightarrow$ ”粒子类型” 由群论确定
3. 局域对称性 $\rightarrow$ 规范场的必然存在 $\rightarrow$ 基本相互作用力

2.2 全同性与统计分裂

2.2.1 实验事实 [E]

所有电子具有完全相同的质量、电荷、自旋。交换任意两个电子，系统的任何可观测量不变。Pauli (1925) 发现两个电子不能占据相同的量子态——这是元素周期表和化学键的基础。

2.2.2 从 Hilbert 空间结构到全同性

[M] 以下推导仅使用第 1 章中编码 [E1] 的数学结构——Hilbert 空间、张量积、内积。

步骤 1 — 张量积与置换：两粒子系统的态在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 中。定义交换算符 $\hat{P}_{12}$ ： $\hat{P}_{12}|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\rangle = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\rangle$ 。

步骤 2 — 双重交换： $\hat{P}_{12}^2 = \hat{I}$ （两次交换回到原态）。因此 $\hat{P}_{12}$ 的本征值只能是 ± 1 。[M]

步骤 3 — 不可分辨性：如果两个粒子在所有内禀属性上完全相同，交换它们不能改变任何可观测量的值。可观测量由 $|\psi|^2$ 给出，因此：

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2 \quad (2.1)$$

这意味着 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\theta} \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ 。配合 $\hat{P}_{12}^2 = I$ 得 $e^{2i\theta} = 1$ ，故 $e^{i\theta} = \pm 1$ 。[M]

结论：

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = +\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \text{ (玻色子)} \quad \text{或} \quad \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \text{ (费米子)} \quad (2.2)$$

[M] 这是置换群的数学推论。在 3+1 维时空中仅有这两种可能。二维系统中允许任意相位 $e^{i\theta}$ (任意子)，这是辫子群的拓扑推论——不是 3+1 维的情况。

2.2.3 Pauli 不相容

[M] 如果两个费米子处于相同的单粒子态 ϕ ：

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_2)\phi(\mathbf{r}_1)] = 0 \quad (2.3)$$

波函数恒为零。 两个全同费米子不能占据相同的量子态——这不是“力”的排斥，是交换反对称性的代数必然。

2.2.4 在 T 的路径积分语言中

在路径积分中，全同粒子的不可分辨性表现为：积分测度 $\mathcal{D}\varphi$ 必须覆盖所有置换等价的构型。Feynman 路径积分自动产生正确的玻色子/费米子统计——不需要额外假设 [M]。

诚实声明： 我们不知道**为什么**自然界中有全同粒子。量子场论提供了一个优雅的解释——所有电子是同一个“电子场”的激发——但这只是把问题向上推了一层：为什么有场？为什么场的激发是全同的？这些问题目前是空白。

2.3 Wigner 分类：“对称性确定”粒子”类型

2.3.1 实验事实 [E]

基本粒子的自旋只取特定值：0, 1/2, 1, 3/2, ... —— 不是连续值。有质量的粒子有 $2s + 1$ 个极化态，无质量粒子只有 2 个螺旋度态。

2.3.2 Wigner (1939) 的发现

[M] Poincaré 群（时空平移 + Lorentz 变换）的不可约幺正表示完全分类了所有可能的“基本粒子”：

- $P_\mu P^\mu = m^2$: Casimir 算子 $\rightarrow$ 质量（连续参数）
- $W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1)$: Pauli-Lubanski 赝矢量 $\rightarrow$ 自旋 $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

数学推论 [M]:

- 自旋只能取整数或半整数——SU(2) 紧群的表示论必然
- $m > 0$: $2s + 1$ 个极化态。 $m = 0$: 仅 2 个螺旋度态
- “基本粒子”的类型 = Poincaré 群的不可约表示标签

2.3.3 含义——以及诚实的边界

Wigner 分类告诉我们：**给定 Poincaré 对称性，粒子的可能类型（质量、自旋）是群表示论的数学推论。**在这个意义上，“粒子”确实不是独立于对称群的实体。

但 Poincaré 群本身是从实验抽象出来的——我们观测到 Lorentz 不变性 [E4] 和时空平移不变性，所以用 Poincaré 群来编码这些对称性。Wigner 分类不能告诉我们“为什么自然界满足 Poincaré 对称性”。

与此相关，自旋-统计定理 (Fierz 1939, Pauli 1940) 证明：在满足 Lorentz 不变性和微观因果性的相对论量子场论中，整数自旋 $\rightarrow$ 玻色子，半整数自旋 $\rightarrow$ 费米子。这是 Lorentz 不变性 + 微观因果性 + 真空正定性 的定理 [M]——不是独立假设。

2.4 规范场：局域对称性逼迫出力

2.4.1 实验事实 [E]

自然界存在四种基本相互作用：电磁力、弱力、强力、引力。电磁力由光子传递，弱力由 $W^\pm, Z^0$ 传递，强力由 8 种胶子传递。所有相互作用的形式由规范对称群唯一确定 [E]。

2.4.2 为什么对称性”逼迫”出力

[M] 以下推导仅使用：复波函数 $\psi(x)$ 、局域相位变换自由、导数需要比较邻近点的值。

步骤 1 — 全局对称性：自由 Dirac 场 $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ 在全局相位变换 $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ 下不变。由 Noether 定理 [M]：守恒流 $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，守恒荷 $Q = \int d^3x J^0$ 。[E] 电荷守恒是实验事实——这里看到它的数学来源。

步骤 2 — 局域对称性的要求：如果我们要求物理定律在局域（位置依赖的）相位变换 $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ 下不变，导数项产生额外贡献：

$$\partial_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha}(\partial_\mu \psi + i\partial_\mu \alpha \cdot \psi) \quad (2.4)$$

步骤 3 — 补偿场的必然引入：[M] 为了消除 $\partial_\mu \alpha$ 项，必须引入一个矢量场 A_μ ，并修改导数为协变导数：

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha \quad (2.5)$$

规范场 A_μ 的存在是被局域对称性逼迫出来的——不是可以自由选择是否添加的。

步骤 4 — 动力学： A_μ 的动能项由 Lorentz 不变性 + 至多二阶导数约束为 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 。[M] 配合物质场的最小耦合 D_μ ，得到完整的 QED Lagrangian。

推广到非 Abel 群：[M] 对 SU(2) (3 生成元 $\rightarrow W^\pm, Z^0$) 和 SU(3) (8 生成元 $\rightarrow$ 8 胶子)，同样的逻辑成立。每种局域对称性逼迫出对应数量的规范玻色子。

2.4.3 诚实声明

规范对称性”解释”了力的存在形式——但力的**具体强度**（耦合常数 g_1, g_2, g_3 ）不由对称性确定。它们是 [EC]——目前只能由实验测量，不由理论推导。为什么规范群是 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 而

不是别的？空白。

2.5 本章小结

给定 Hilbert 空间 + 张量积 + 对称群（第 1 章的数学结构），以下推论自动成立——不需要新的物理假设：

推论	逻辑类型	说明
全同性 + 统计分裂	[M]	张量积 + 置换群 $\hat{P}_{12}^2 = I \rightarrow \pm 1$
Pauli 不相容	[M]	反对称波函数 $\rightarrow$ 同态振幅为零
Wigner 分类	[M]	Poincaré 群不可约表示 $\rightarrow$ 自旋离散
自旋-统计定理	[M]	Lorentz + 微观因果性 + 真空正定性
规范场存在性	[M]	局域对称性 + 导数 $\rightarrow$ 补偿场必须存在

哪些仍然是空白：为什么有全同粒子（vs. 场是更基本的？）；为什么 Poincaré 群被满足；为什么是这些规范群——以上全部**未知**。

Chapter 3

EP：引力的几何本质

3.1 实验事实 [E5]

在进入任何理论之前，先列出我们实际观测到的：

- **弱等效原理**：所有物体在引力场中以相同的加速度自由下落。 $m_i/m_g = 1$ 在 10^{-15} 精度内成立 (MICROSCOPE 2022) [E]
- **引力红移**：光在引力场中爬升时频率降低 (Pound-Rebka 1959) [E]
- **GPS 时间修正**：若不修正 GR 效应 (SR + GR 总计 $\sim 38\mu\text{s}/\text{天}$)，GPS 定位每天累积误差 $\sim 11\text{ km}$ [E]
- **引力波**：LIGO/Virgo 直接探测到 $h_+, h_\times$ 两个极化模式——与 $D = 4$ 的预言一致。GW170817：引力波与光信号同时到达， $\Delta v/c < 10^{-15}$ [E]
- **强等效原理**：脉冲星双星 PSR J0737-3039 的轨道衰减与 GR 预言一致，在 10^{-3} 精度内检验了 SEP [E]

3.2 从实验事实到数学编码

3.2.1 等效原理与度规的动力学化

逻辑链：

前提： $m_i = m_g$ [E5]。所有物体自由下落加速度相同。

推论：在局域自由下落参考系中，引力被”消除”——无法通过任何局域非引力实验区分”自由下落”和”无引力”。这正是 Einstein 将引力几何化的逻辑起点。

数学编码：时空由 Lorentz 流形 $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ 描述。 $g_{\mu\nu}$ 本身是一个动力学场——由物质分布决定，又反过来决定物质的运动：

$$\text{物质告诉时空如何弯曲；时空告诉物质如何运动。} \quad (3.1)$$

3.2.2 Lovelock 定理: GR 的唯一性

[M] Lovelock (1971) 证明了: 在 4 维时空中, 唯一产生至多二阶运动方程 (避免 Ostrogradsky 鬼场) 的纯度规 Lagrangian 是:

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) \quad (3.2)$$

由此得到 Einstein 场方程:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

[M] 这不是” Einstein 的选择” —— 给定 $D = 4$ 、至多二阶场方程、广义协变性, Einstein 方程是数学上的唯一可能。Lovelock 定理是” 引力的唯一性定理”。

Newton 极限: [L] 弱场 + 低速极限下, $\nabla^2 \Phi \approx 4\pi G \rho \rightarrow$ Newton 万有引力。

3.3 开放问题

3.3.1 EP 是独立的物理基础吗?

问题: 等效原理 ($m_i = m_g$, 度规是动力学场) 是否可以从不包含它的更基础原理中推出?

论证一 (Weinberg 1964): 任何 Lorentz 不变 + 包含无质量自旋-2 粒子的理论, 在低能极限下, 该粒子必须普适地耦合到能量-动量张量。这意味着 $m_i = m_g$ 和 Einstein 场方程可能是自旋-2 无质量粒子存在性的**定理**, 而非独立公理。

论证二 (弦论): 在弦论中, 无质量自旋-2 模式 (引力子) 自动出现在闭弦谱中。等效原理和 GR 是弦论的低能极限——在这个框架中, 它们不是基本公理, 而是涌现推论。

论证三 (因果集/LQG): 如果时空本身在 Planck 尺度是离散的, 那么连续度规和等效原理都是大尺度 (低能) 涌现的有效描述。

当前状态: 开放。没有人知道 EP 是否是独立于 T (路径积分结构) 的物理基础。

这个问题的重要性: 如果 EP 是定理 (从 T + 无质量自旋-2 推出), 那么真法律只有 T 一条。如果 EP 是独立公理, 真法律有两条。

3.3.2 为什么是 Einstein-Hilbert 作用量而不是别的?

Lovelock 定理在 4D 中是完备的。但:

- 在更高维 (弦论), Lovelock 允许额外的高阶曲率项。在 4D 中它们恒为零——但如果额外维被紧化, 它们可能留下痕迹。
- 在量子层面, 即使 4D 中也预期有 $R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 等阶曲率修正——它们在低能被 $1/M_P^2$ 压低, 但在 Planck 尺度变得重要。

开放问题: Planck 尺度的引力 Lagrangian 是什么? Lovelock 定理在量子层面是否仍然限制 Lagrangian 的形式?

3.3.3 暗物质和暗能量——EP 的危机？

星系旋转曲线、引力透镜、宇宙加速膨胀——这三条独立观测线索都需要超出标准模型 + GR 的新物理。可能的方向：

1. 存在新粒子（暗物质）+ 宇宙学常数（暗能量）——不改动 EP 或 GR
2. 在星系尺度修改引力（MOND, TeVeS）——弱场 EP 可能被修改
3. 修改 GR 本身（ $f(R)$, 标量-张量, 大质量引力）——EP 可能只在特定尺度成立

当前状态：开放。没有公认的解决方案。如果选项 2 或 3 正确，EP 的有效范围将被限制。

3.3.4 引力是否在根本意义上不同？

所有其他相互作用（电磁、弱、强）都由规范对称性 $U(1), SU(2), SU(3)$ 管辖。引力由广义协变性 + 等效原理管辖。它们是两个完全不同的原则。

统一理论（弦论、LQG）试图将引力纳入与其他力相同的框架。但 EP 在 T 框架中是否有独立地位——**开放**。

3.4 本章小结

- **已知 [E]**：等效原理在 10^{-15} 精度内成立。Lovelock 定理 [M] 证明 GR 是 4D 中唯一至多二阶的度规理论。
- **未知**：EP 是否独立于 T？引力是否根本地不同于其他力？暗物质和暗能量是否需要修改 EP？
- **在这些问题解决之前**，EP 作为“度规是动力学场”这一物理事实 [E5] 的编码保留。它与 T 的关系——独立 vs. 可推导——标记为**开放**。

Chapter 4

偶然事实与开放问题

4.1 总说：不能推导的输入

第 1 章列出了三个观测域的数学编码。第 2 章展开了这些编码的数学推论。第 3 章讨论了 EP 的已知和未知。但有一个问题我们一直在回避：

为什么是这个宇宙，而不是别的？

以下事实不由第 1-3 章中的任何数学结构确定——它们是这个宇宙的”输入参数”。

4.2 EC1: 时空维度 $D = 3 + 1$

4.2.1 已知

Ehrenfest (1917) 系统分析了空间维数对物理定律的影响：

- $D = 3$ 时 Gauss 定律 $\rightarrow$ 平方反比律 $F \propto 1/r^2$ [M]
- $D = 3$ 时有稳定 Kepler 轨道——仅此维数下 V_{eff} 有极小值 [M]
- D 为奇数 $\rightarrow$ Huygens 原理成立：波传播后立即恢复寂静 [M]
- $\text{SO}(3)$ 有 3 个生成元 $\rightarrow$ 角动量的 $2\ell + 1$ 简并度 [M]
- 引力波有 $D(D-3)/2 = 2$ 个极化模式 ($D = 4$ 时空) [M]

一旦输入 $D = 3 + 1$ ，以上全部严格推导 [E1]。问题在于 $D = 3 + 1$ 本身从何而来。

4.2.2 开放问题

- **因果集理论**：随机生长的因果集在宏观极限下典型地涌现 $D = 4$ 时空。如果这是正确的， $D = 3 + 1$ 可能是动力学的必然推论，不是偶然参数。但这一论证依赖于特定的生长动力学——为什么是那个动力学？
- **弦论**：10 或 11 维时空，6 或 7 个空间维被紧化。为什么恰好 6 个被紧化？这和 Calabi-Yau 流形的数学性质有关——但为什么是这个特定的紧化？**景观问题**： 10^{500} 个可能的紧化解。

- **人择原理**: $D = 3 + 1$ 是唯一允许稳定原子、化学和生命存在的维数。这是选择效应，不是解释。它不能回答“为什么 $D = 3 + 1$ 在物理上被选择”。

当前状态: 开放。 $D = 3 + 1$ 是认知偶然 [EC]——我们不知道理由，更深理论可能确定。目前没有已知论证能唯一地推出它。

4.3 EC2: 规范群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

已知: 标准模型的规范群有三个因子，分别对应三种力:

- $U(1)_Y$ (1 生成元) $\rightarrow$ 光子 $\rightarrow$ 电磁力
- $SU(2)_L$ (3 生成元) $\rightarrow W^\pm, Z^0 \rightarrow$ 弱力
- $SU(3)_C$ (8 生成元) $\rightarrow$ 8 胶子 $\rightarrow$ 强力

开放问题:

- 为什么是三个因子而不是一个简单群? 大统一理论 (GUT: $SU(5), SO(10), E_6$) 试图在高能标将三者统一为一个简单群。质子衰变的未观测将 $SU(5)$ GUT 排除在最简形式之外。**GUT 正确吗? 如果是, 哪个群?**
- 弦论中, 规范群由紧化流形的拓扑和同调决定。 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 在某些紧化中是非常自然的——但不是唯一解。**有没有唯一的选择原则?**
- 为什么弱力只耦合左手粒子 ($SU(2)_L$)? **为什么自然是手性的?**

当前状态: 开放。[EC]。

4.4 EC3: 26 个自由参数

SM 有 19 个参数 (含中微子质量后 26 个):

- 3 个规范耦合: g_1, g_2, g_3
- Higgs vev $v \approx 246$ GeV, Higgs 自耦合 λ
- 6 个夸克质量 + 3 个轻子质量
- 4 个 CKM 参数 (3 个混合角 + 1 个 CP 破坏相位)
- θ_{QCD} (强 CP 角——为什么 ≈ 0 ?)
- (+ 3 中微子质量, 4 PMNS 参数, 可能 2 Majorana 相位)

开放问题:

- 为什么 $m_e/m_\mu \approx 1/207$? 为什么 $m_t \approx 173$ GeV 而 $m_u \approx 2$ MeV? **质量层级问题**

- 为什么 $\theta_{\text{QCD}} < 10^{-10}$? **强 CP 问题**——轴子是最流行的解, 但轴子未被发现。
- 弦景观中有 10^{500} 个亚稳真空, 每个有不同的参数值。我们在这个真空中的参数是随机的还是由某种动力学选择的? **景观的预测能力?**

当前状态: 开放。[EC]。没有任何一个参数值被证明是从第一原理唯一确定的。

4.5 EC4: $c, \hbar, G$ ——三个基本常数

常数	值	地位	量纲
c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$	SI 定义常数 (exact)	$\text{L} \cdot \text{T}^{-1}$
$\hbar$	$1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	SI 定义常数 (exact)	$\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$
G	$6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	实验测定	$\text{M}^{-1} \cdot \text{L}^3 \cdot \text{T}^{-2}$

开放问题:

- c 和 $\hbar$ 在 SI 2019 中被定义为精确值——它们的数值是单位制的产物, 不是自然的参数。但无量纲组合 (如精细结构常数 $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137.036$) 是真正的自然常数。**为什么 $\alpha \approx 1/137$?**
- 三者在 Planck 尺度交汇: $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.616 \times 10^{-35} \text{ m}$ 。**Planck 尺度上, $c, \hbar, G$ 是否统一为单一的基本尺度?**
- Dirac 大数假说 (1937): G 可能随时间缓慢变化。 **G 是真正的常数吗?**

当前状态: 开放。[EC]。

4.6 EC5: 宇宙初始低熵

Penrose 估计宇宙初始熵与最大可能熵的比值为 $S_{\text{initial}}/S_{\text{max}} \sim 10^{-10^{123}}$ 。这个极低的初始熵是热力学时间箭头的最终来源——所有不可逆过程最终追溯到宇宙的初始条件。

开放问题:

- 暴胀将初始低熵“稀释”到极大的空间区域——但暴胀本身的初始条件从何而来?
- Hartle-Hawking 无边界提议: 宇宙的初始条件是“没有初始条件”——量子宇宙学的路径积分在 Euclidean 区域自然闭合。这能解释低熵吗? **未解决。**
- 为什么初始熵如此之低? **这是 Penrose 的“Weyl 曲率假说”未能解答的核心谜题。**

当前状态: 开放。[EC]。

4.7 开放问题汇总

以下问题在本书框架中被标记为**开放**——不是因为不重要, 而是因为我们真的不知道答案:

#	问题	章节	现状
1	为什么量子力学用 Hilbert 空间?	Ch1	Hardy 提供部分解释, 但前提仍需物理输入
2	路径积分结构是必然还是偶然?	Ch1	未知。所有已知理论满足——可能是选择效应
3	Hilbert 空间是基本还是涌现?	Ch1	未知。Planck 尺度可能涌现自离散结构
4	为什么自然界有全同粒子? 场是基本的吗?	Ch2	QFT 编码了全同性——但场本身为什么存在?
5	EP 是否独立于 T?	Ch3	Weinberg vs. 弦论 vs. LQG——无共识
6	$D = 3 + 1$ 为什么?	Ch4	因果集? 弦紧化? 人择? ——无共识
7	为什么规范群是 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$?	Ch4	GUT + 弦紧化候选——未唯一确定
8	为什么 26 个参数取这些值?	Ch4	质量层级、强 CP、景观——全部未解决
9	$\alpha \approx 1/137$ 为什么?	Ch4	未解决
10	为什么初始熵极低?	Ch4	暴胀 + 无边界提议——未唯一确定
11	引力是否根本地不同于其他力?	Ch3	等效原理 vs. 规范对称性——两种不同原则
12	暗物质和暗能量是否需要修改 EP/GR?	Ch3	三种候选路径——无实验裁决

Table 4.1: 本书中的开放问题

这些不是缺陷——它们是物理学的真实前沿。诚实比假装知道更重要。

4.8 本章小结

T (第 1-2 章的数学结构) + EP (第 3 章的度规动力学) 构成了已知物理定律的全部组织框架。但框架中有大量“输入参数”—— $D = 3 + 1$ 、规范群、26 个参数、 $c, \hbar, G$ 、初始条件——不由框架本身确定。

这些是**认知偶然 [EC]**: 不由已知原理推导, 但可能由更深理论确定。目前没有任何参数被证明是**本体论偶然 [OC]** (在所有自洽物理世界中不可推导的)。

如果未来所有 [EC] 都被证明是必然的, 真法律列表仍是第 1-3 章的内容。如果某些 [EC] 被证明是真正的 [OC], 那么这些构成了物理基础的额外成员。无论结果如何——这些问题的答案决定了物理学基础最终采取什么形式。

Part II

有效定律：四十三条推导

第二部分导览

推导分组与覆盖

本部分包含四十三条推导链，按物理领域分为十一组（G1-G11），分别对应不同的核心原则组合：

组	数量	内容	主要前提
G1	1	Euler-Lagrange 方程	$[E2] \rightarrow \delta S = 0$ [M]
G2	5	Noether 定理 + 四守恒律	$[E2]+[E4]$
G3	3	Newton 三定律	$[E2] + \text{E-L}$ [M]
G4	6	Maxwell 电磁学	$[E6]+[E2]+[E4]$
G5	5	量子力学 + Pauli	$[E1]+[E4]$
G6	4	相对论 + Einstein 场方程	$[E4]+[E5]+\text{Lovelock}$ [M]
G7	5	热力学	$[E3]+[E1]$
G8	3	推论 (Kepler, FD, BE)	已证定律
G9	7	维度结构推论	EC1 ($D = 3 + 1$) [EC]
G10	1	Nernst 不可达性	$[E3] +$ 第三定律 [L]
G11	3	SM 有效场论	$[E6]+[E7]$ (SM 输入 [EC])

阅读提示：每组推导均可独立阅读。每条定律的推导步骤中，方框标记 $\boxed{[N]}$ 表示**必要性条件**——若移除则推导在该步断裂； $\boxed{[S]}$ 表示**充分性条件**——给定这些前提，结论必然成立。每条的推导结束处附反向蕴含检查 (reversible: true/false)，说明结论是否能反推前提。

Chapter 5

力学：从最小作用量到万有引力

5.1 概述

力学是 R2（最小作用量原理）最直接的产物。给定系统的拉格朗日量 $L = T - V$ ，Euler-Lagrange 方程自动产生全部运动方程。本章展示从 $\delta S = 0$ 出发，依次推出 Euler-Lagrange 方程、Noether 定理、Newton 三大定律、万有引力定律和 Kepler 第三定律。

依赖的 T+EP 组件						
R1 时空	R2 作用量	等效原理	Noether	Euler-Lagr.	引力	

本章的核心启示

从一条原理 ($\delta S = 0$) 出发，通过严格的数学推导，你可以得到整个经典力学的全部运动方程。这不是巧合——这是因为”作用量取平稳值”就是物理世界选择演化路径的机制。本章的每一条推导都在验证：数学上的必然性如何转化为物理上的普适性。

每条定律标注逻辑前提、推导步骤、必要条件 [N] 和充分条件 [S]。

5.1.1 科普层：三百年后 $F = ma$ 仍未被推翻

苹果落在 Newton 头上的故事是后人的浪漫化（实际是他在乡下避瘟疫时观察到的）。但 Newton 1687 年的真正成就远比”发现重力”深刻：他证明了**使苹果落地的力，与维持月球绕地的力，是同一种力**——并以 $F = Gm_1m_2/r^2$ 量化了它。

Newton 把 Kepler 的三定律从经验规律提升为推论。 Kepler (1609-1619) 通过 Tycho Brahe 的火星观测归纳出三条经验定律：椭圆轨道、面积速度恒定、周期与半长轴 $3/2$ 次方成正比。Newton 证明：只要假设引力是 $1/r^2$ 的中心力，所有三条 Kepler 定律就是数学推论。这是物理学第一次成功地把”现象学规律”还原为”基础动力学定律”。

但 Newton 的 $F = ma$ 形式在数学上并非最优雅。1788 年，Lagrange 在《分析力学》中提出：用广义坐标 q_i 和拉氏量 $L = T - V$ ，运动方程是 $\partial L / \partial q_i = d(\partial L / \partial \dot{q}_i) / dt$ 。这个形式有三大优势：

- 1. **坐标无关**：不必区分笛卡尔/极/球坐标，自动处理约束。

2. **对称性显式**：Noether 定理直接从 L 的对称性得到守恒量。

3. **推广无碍**：场论、相对论、量子力学都使用同一框架。

现代物理教学普遍以 **Lagrange 形式为主**，正是因为它把 R^2 （最少作用量）作为根基，而 $F = ma$ 退化为它的特殊推论。Newton 形式仍在工程和入门课程中广泛使用，因为它直接、直观；但在深层物理研究中，几乎所有先进理论都从拉氏量出发。

5.1.2 核心图像：单摆的两副语言

考虑长度 ℓ 、质量 m 的单摆，重力 g 。设摆角 θ 为广义坐标。

Newton 视角：在切向方向，重力分量 $-mg \sin \theta$ 提供加速度 $\ell \ddot{\theta}$ ，得：

$$\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + (g/\ell) \sin \theta = 0$$

Lagrange 视角：动能 $T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$ ，势能 $V = mg\ell(1 - \cos \theta)$ 。

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos \theta)$$

Euler-Lagrange 方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m \ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0$$

即 $\ddot{\theta} + (g/\ell) \sin \theta = 0$ 。

两种语言得到相同方程。但 Lagrange 视角的优势在于：如果加上约束（双摆、绳长变化等），Newton 视角需要小心处理张力等内力，Lagrange 视角自动消去内力——这就是它在复杂系统中胜出的原因。

小角近似量级估算 当 $\theta \ll 1$ ， $\sin \theta \approx \theta$ ，方程退化为 $\ddot{\theta} = -(g/\ell)\theta$ ，简谐运动周期 $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ 。1 米单摆 $T \approx 2$ 秒，与日常经验一致。

5.2 Euler-Lagrange 方程

5.2.1 物理直觉

一个球从斜坡上滚下，它走的是哪条路？经验告诉我们：不是最快的路，不是最短的路——而是“作用量”最小的路。作用量 $S = \int L dt$ 是拉格朗日量 $L = T - V$ 在时间上的累积。球必须在每个瞬间“平衡”两种倾向：动能喜欢大（球想滚得快），势能喜欢小（球想待在低处）。真实路径是这两种倾向在所有可能路径中的最优折中。

数学结构：这就是一个**泛函极值问题**——在所有连接起点和终点的可能路径中，找一条使积分 $S = \int L(q, \dot{q}, t) dt$ 取极值的路径。这完全类似于“在所有连接两点的曲线中找最短的那条”（那是测地线问题），只不过被积函数从弧长元 $\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ 换成了拉格朗日量 L 。

Euler-Lagrange 方程就是这个泛函极值问题的解——它告诉你极值路径必须满足的微分方程。它之于变分问题，如同 $f'(x) = 0$ 之于普通函数的极值问题。

Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

前提：R2 ($\delta S = 0$) 推导号：deriv.euler_lagrange

5.2.2 变量定义

变量	符号	类型	量纲	定义域	含义
作用量	S	泛函	$M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$	$S[q] = \int L dt$	动力学泛函 (R2)
拉格朗日量	L	$\mathbb{R}$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	$L \in C^2(q, \dot{q}, t)$	$T - V$ (R2)
广义坐标	q_i	$\mathbb{R}$	依赖系统	$q_i \in C^2([t_1, t_2])$	独立位形变量
广义速度	$\dot{q}_i$	$\mathbb{R}$	依赖系统	$\dot{q}_i = dq_i/dt$	
变分	δq_i	$\mathbb{R}$	依赖系统	$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$	无穷小变分
时间	t	$\mathbb{R}$	T	$t \in [t_1, t_2]$	时间坐标 (R1)

Table 5.1: Euler-Lagrange 方程——变量定义

5.2.3 推导

推导：从最小作用量到 Euler-Lagrange 方程

Step 1 — 作用量定义： $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ (R2)

Step 2 — 路径变分，端点固定： $\delta S = \int [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt$ [N]
 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

Step 3 — Taylor 展开至一阶： $\delta S = \sum_i \int [\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i] dt$ [N] $L \in C^2$

Step 4 — 分部积分第二项： $\int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt = [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i]_{t_1}^{t_2} - \int \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) \delta q_i dt$

Step 5 — 边界项因固定端点消失 $\rightarrow$ 整理： $\delta S = \sum_i \int [\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})] \delta q_i dt$

Step 6 — $\delta S = 0$ (R2) + 变分学基本引理 (δq_i 任意)： $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = 0$ [N] δq_i 任意且独立

必要条件： R2 ($\delta S = 0$), $L \in C^2$, 固定端点, δq_i 任意独立。

充分条件： 给定 C^2 拉格朗日量和固定端点, $\delta S = 0 \iff$ Euler-Lagrange 方程。reversible: true

关键洞察： Euler-Lagrange 方程的核心：分部积分把对 $\delta \dot{q}$ 的依赖转化为对 δq 的依赖——这本质上是把“速度的变分”转化为“位置的变分”，代价是引入一个时间导数 d/dt 作用在 $\partial L / \partial \dot{q}$ 上。这个 $d/dt(\partial L / \partial \dot{q})$ 就是“广义动量的变化率”——所以 Euler-Lagrange 方程说的是：广义力 = 广义动量的变化率。

数学 $\rightarrow$ 物理桥梁： $\delta S = 0 \xrightarrow{\text{分部积分+变分引理}} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

分部积分把边界“扔掉”（固定端点），导数从变分 δq 转移到 $\partial L / \partial \dot{q}$ 上

物理 $\rightarrow$ 数学桥梁： 自然界选择作用量最小的路径 $\rightarrow$ 这条路径必须满足一个二阶微分方程 $\rightarrow$ 给定初位置和初速度，未来完全确定

物理因果（决定论）从变分原理中自动涌现

数量级估计：经典作用量的大小

对于一个宏观物体，作用量 S 的典型值远大于 $\hbar \approx 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ：

- 棒球 ($m = 0.15 \text{ kg}$, $v = 40 \text{ m/s}$, 飞行1秒) : $S \sim \frac{1}{2}mv^2 \cdot \Delta t \sim 120 \text{ J} \cdot \text{s} \sim 10^{36} \hbar$
- 电子在原子中 (Bohr轨道) : $S \sim \hbar$ (量子效应显著——不能用经典路径!)
- 宏观摆锤 ($m = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, 周期2s) : $S \sim \text{几 J} \cdot \text{s} \sim 10^{34} \hbar$

这就是为什么经典力学在宏观世界精确成立： $S/\hbar \gg 1$ 时，路径积分 $\int e^{iS/\hbar}$ 中只有 $\delta S = 0$ 附近的路径相干加强，其他路径的贡献因相位快速振荡而抵消——这正是量子力学退化为经典力学的机制。

精度等级

Euler-Lagrange 方程：**[精确]**——它是变分法的数学恒等式，不是近似。

但其应用于具体物理系统时，精度取决于 L 的近似程度——例如忽略相对论修正、量子修正或耗散力时， $L = T - V$ 本身就是近似的。

5.3 Noether 定理

5.3.1 物理直觉

Emmy Noether 在 1918 年证明了一个被爱因斯坦称为“数学史上最深刻的定理之一”的结果。其物理含义极为简洁：

如果你在某个方向上看不出物理定律有任何区别，
那么在那一方向上就一定有一个守恒量。

具体来说：

- 时间平移看不出区别（今天和昨天物理定律一样）→ **能量守恒**
- 空间平移看不出区别（这里和那里的物理定律一样）→ **动量守恒**
- 旋转看不出区别（朝这个方向和那个方向的物理定律一样）→ **角动量守恒**
- 量子相位平移看不出区别（波函数的整体相位不可观测）→ **电荷守恒**

数学结构：Noether 定理是一个**数学恒等式**——只要你接受作用量原理和连续对称性，守恒流就自动出现。它不依赖于任何具体的力的形式、也不依赖于任何具体的物质组成。Hilbert 曾试图自己证明这个定理但没有成功；Noether 用群论和变分法结合的方式干净利落地完成——这需要同时精通抽象代数和解析力学，在当时的数学界几乎只有她能做到。

Noether 定理

作用量 S 的每个连续对称性变换对应一个守恒的 Noether 荷 Q ：

$$Q \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i - F, \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

前提：R2, R1 推导号：deriv.noether_theorem

5.3.2 变量定义

变量	符号	类型	量纲	定义域	含义
无穷小参数	ε	$\mathbb{R}$	[1]	$ \varepsilon \ll 1$	连续变换参数
生成函数	Q_i	$\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$	依赖变换	$Q_i \in C^1$	对称性变换生成元
规范函数	F	$\mathbb{R}$	与 L 同量纲	—	边界项 $L' = L + \varepsilon dF/dt$
Noether 荷	Q	$\mathbb{R}$	依赖变换	$dQ/dt = 0$	守恒量

Table 5.2: Noether 定理——新增变量

5.3.3 推导**推导：Noether 定理**

Step 1 — 对称性变换： $q_i \rightarrow q'_i = q_i + \varepsilon Q_i(q, \dot{q}, t)$ [N] Q_i 可微， ε 为 Lie 群参数

Step 2 — 对称性条件： $S[q'] = S[q] + \varepsilon[F(t_2) - F(t_1)] \implies L' = L + \varepsilon dF/dt$ [N] 作用量必须不变（至多差边界项）

Step 3 — 展开 L' ： $L' - L = \varepsilon \sum_i [\frac{\partial L}{\partial q_i} Q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{Q}_i]$

Step 4 — 用 Euler-Lagrange 替换 $\partial L / \partial q_i$ ： $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})$ [N] 系统沿真实路径（on-shell）

Step 5 — 重组为全导数： $\sum_i [\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) Q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{Q}_i] = \frac{d}{dt}(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i)$

Step 6 — 与对称性条件联立： $\frac{d}{dt}(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i - F) = 0$

Step 7 — 定义守恒荷： $Q \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i - F, \quad dQ/dt = 0$

必要条件： R2, R1（时间坐标），连续对称性（Lie 群）， $L \in C^2$ ，Euler-Lagrange 成立（on-shell）。

充分条件： 连续对称性 + Euler-Lagrange $\implies$ 守恒流。reversible: true（逆 Noether 定理：每个守恒量对应一对称性）。

关键洞察： Step 4 是 Noether 定理证明中最关键的技巧——用 Euler-Lagrange 方程消去 $\partial L / \partial q_i$ 。这意味着 Noether 定理只在“真实路径”上有意义：对称性告诉你，如果你走在正确的道路上（满足运动方程），那你在某个方向上的“Noether 荷”就不会变。

数学→物理桥梁： 对称性变换 $q \rightarrow q + \varepsilon Q$ 保持 S 不变（至多差边界项）

$\xrightarrow{\text{Euler-Lagrange}} d/dt(\sum p_i Q_i - F) = 0$

物理→数学桥梁： 物理定律在某个变换下不变 $\rightarrow$ 在这个变换的“方向”上存在一个守恒量

反过来：如果你发现一个守恒量，背后必定有一个对称性

数量级与验证：能量守恒的精度

Noether 定理本身是**[精确]**——它是数学定理。但能量守恒的**实验验证精度**极其惊人：

- **宏观机械能守恒**：精度 $\sim 10^{-5}$ （受摩擦力等非保守力限制）
- **电磁学中的 Poynting 定理**：精度 $\sim 10^{-8}$ （光子计数实验）
- **核反应中的质能守恒**（ $E = mc^2$ 结合）：精度 $\sim 10^{-7}$ （ α 粒子能量测量）
- **宇宙学中的总能量**：广义相对论中全局能量守恒并不严格成立（因为时空中没有全局时间平移对称性）——这恰恰验证了 Noether 定理的逻辑：对称性不存在 $\Rightarrow$ 守恒律不存在

最后一个例子是 Noether 定理最重要的反面教材：膨胀宇宙没有时间平移对称性，所以宇宙的总能量没有严格守恒的定义。

精度等级

Noether 定理本身：**[精确]**（纯数学定理，不需要实验验证）

推出的守恒律：**[精确]**在对应对称性精确成立时；**[近似]**在对称性近似成立时（如有心力近似、弱外力微扰）

5.4 Newton 运动定律

5.4.1 第一定律（惯性定律）

物理直觉

Newton 第一定律说”不受力的物体保持静止或匀速直线运动”。这听起来像废话——但它不是。在 Newton 之前，Aristotle 的物理学认为物体的”自然状态”是静止——推它才动，不推就停。第一定律的革命性在于：它声明**匀速运动**和静止一样”自然”，**改变速度才需要理由（力）**。

从 R2 的角度看，这更自然：自由粒子的 $L = \frac{1}{2}mv^2$ （只有动能），Euler-Lagrange 方程给出 $d(m\mathbf{v})/dt = 0$ ——速度不变就是自由粒子的”自然选择”。

关键洞察：惯性定律不是实验总结出来的——它是对”力”的定义。什么样的参考系里自由粒子匀速运动？这个参考系就叫惯性系。所以第一定律同时定义了”惯性系”和”不受力”——它是一把双刃剑。

日常直觉与物理精确性

在桌面上推一本书，手离开后它停下来——Aristotle 说”自然状态是静止”。Newton 说：不对，它停下来是因为摩擦力——如果桌面完全光滑（真空、无摩擦），书会永远滑下去。

精度：在地球表面，摩擦力 $f = \mu mg \approx 0.3 \times 1 \times 9.8 \approx 3 \text{ N}$ （对一本1kg的书）。在太空中（ $f \ll 10^{-9} \text{ N}$ ），一个物体的速度可以保持在 10^{-12} 精度以内。惯性定律在无外力时精确成立，偏差仅来自未被建模的微小外力。

Newton 第一定律

 $F = 0 \implies d\mathbf{v}/dt = 0$ (匀速直线运动) 前提: R2, R1 推导号: deriv.newton_first

变量: 力 F [M·L·T⁻²], 速度 $\mathbf{v}$ [L·T⁻¹], 质量 m [M] (常数)。

推导

Step 1 — 自由粒子 Lagrangian: $L = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$ ($V = \text{常数} \implies \nabla V = 0$)

Step 2 — Euler-Lagrange: $d(m\mathbf{v})/dt = -\nabla V = 0$ [N] m 常数 [N] 惯性系

Step 3 — $\mathbf{v} = \text{常数}$ 。 [S] 自由粒子 $L + \text{Euler-Lagrange} \Rightarrow$ 第一定律。

5.4.2 第二定律 (运动方程)

Newton 第二定律

 $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (一般形式); m 常数时 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 前提: R2, Euler-Lagrange, R1

变量: 动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ [M·L·T⁻¹], 加速度 $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ [L·T⁻²], 力 $\mathbf{F} \equiv -\nabla V(\mathbf{r})$ [M·L·T⁻²]。

推导

Step 1 — $L = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 - V(\mathbf{r})$ [N] 保守力 (V 存在)

Step 2 — Euler-Lagrange: $d(m\mathbf{v})/dt = -\nabla V$

Step 3 — 定义 $\mathbf{F} \equiv -\nabla V \implies d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ [S] $L = T - V + \text{Euler-Lagrange} \Rightarrow$ 第二定律。

关键洞察: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 不是 Newton 写的。他写的是 $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ——力的定义是“动量的变化率”。当质量不变时两者等价, 但当质量可变 (如火箭喷气、相对论效应), $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ 才是正确形式。

数学→物理桥梁: $d(m\mathbf{v})/dt = -\nabla V \xrightarrow{\text{定义}} \mathbf{F} \equiv -\nabla V$

力不是原始概念——它是由势能的梯度定义出来的

物理→数学桥梁: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ 不是实验规律——它是对“力”这个概念的定义

真正有物理内容的是 $\mathbf{p}$ 和 V 的形式, 以及 V 的可微性

第二定律的尺度范围

- **原子尺度** ($r \sim 10^{-10}$ m): Lorentz 力支配电子运动, $F \sim e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2) \approx 2.3 \times 10^{-8}$ N; 量子效应显著 ($S \sim \hbar$)
- **人体尺度** ($m \sim 70$ kg, $a \sim 1$ m/s²): $F \sim 70$ N; 经典力学精确成立
- **太阳系尺度** ($M_\odot \sim 2 \times 10^{30}$ kg, $r \sim 1$ AU $\sim 1.5 \times 10^{11}$ m): $F = GM_\odot M_\oplus / r^2 \approx 3.5 \times 10^{22}$ N; 牛顿引力精确度 $\sim 10^{-8}$ (仅水星近日点进动需 GR 修正, $\sim 43''$ / 世纪)
- **速度极限**: $v \ll c$ 时第二定律 ($F = ma$) 成立; $v \rightarrow c$ 时需替换为 $F = d(\gamma m v)/dt$

5.4.3 第三定律（作用-反作用）

Newton 第三定律

$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ （弱形式：大小相等方向相反；强形式 collinear 在 EM 中破缺） 前提：Noether 定理, R1

推导

Step 1 — 孤立系统动量守恒（Noether）： $d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/dt = 0$ [N] 孤立系统（无外力）

Step 2 — Newton 第二定律： $d\mathbf{p}_1/dt = \mathbf{F}_{12}$, $d\mathbf{p}_2/dt = \mathbf{F}_{21}$

Step 3 — $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \implies \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ [S] 动量守恒 + 第二定律 $\Rightarrow$ 第三定律弱形式。

关键洞察：电磁学中，两个运动的点电荷之间的力并不严格满足 Newton 第三定律（强形式要求力沿连线），因为电磁场本身携带动量。系统的总动量（粒子 + 场）仍然守恒——这是 Noether 定理的又一个精妙之处：守恒的是总动量，不是粒子的机械动量。

Newton 三定律：精度等级

第一定律：**[精确]**（惯性系的定义性特征），但在 GR 中惯性系仅是局域概念

第二定律：**[有效]**—— $L = T - V$ 是有效描述，非相对论性（ $v \ll c$ ），非量子性（ $S \gg \hbar$ ）

第三定律——弱形式（ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ）：**[有效]**——在电动力学中，场携带的动量使瞬时作用的第三定律破缺

第三定律——强形式（力沿连线）：**[近似]**——电磁力不沿连线（Biot-Savart 定律中运动电荷间的力有横向分量）

5.4.4 万有引力定律

Newton 万有引力定律

$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ 前提：Einstein 场方程（弱场极限），R1

变量：引力常数 $G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ [$\text{M}^{-1} \cdot \text{L}^3 \cdot \text{T}^{-2}$], 引力势 $\phi = -GM/r$ [$\text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$], 质量密度 ρ [$\text{M} \cdot \text{L}^{-3}$].

推导：从 Einstein 场方程到 Newton 引力

Step 1 — 弱场近似： $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ [N] weak_field_limit

Step 2 — Einstein 场方程 (0,0) 分量弱场展开： $R_{00} \approx -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}$

Step 3 — 从测地线方程得 $h_{00} = 2\phi/c^2$

Step 4 — 化为 Poisson 方程： $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$

Step 5 — 球对称解： $\phi = -GM/r$, $\mathbf{F} = -m \nabla \phi = -GmM/r^2 \hat{\mathbf{r}}$ [S] Einstein 场方程 + 弱场低速极限 $\Rightarrow$ Newton 引力。reversible: false (Newton 理论是 GR 的低能有效理论)。

关键洞察：引力常数 G 是所有物理常数中测量精度最低的——不确定性 2.2×10^{-5} (CODATA 2022)。相比之下，精细结构常数 α 的精度是 1.5×10^{-10} 。引力太弱了——两个质子间的引力是电磁力的 $Gm_p^2/(e^2/4\pi\epsilon_0) \approx 8 \times 10^{-37}$ ——这使得精确测量 G 极其困难。

数学→物理桥梁：Einstein 场方程 $G_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}$

$\xrightarrow{\text{弱场+低速}} \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \xrightarrow{\text{球对称}} \mathbf{F} = -GmM/r^2 \hat{\mathbf{r}}$

物理→数学桥梁：GR → Newton 引力的过程不是“近似”——它是 GR 在特定极限下的**精确约化** 每步都是数学恒等式在特定条件下的退化，而非数值拟合

引力的尺度——从量子到宇宙

- **两个质子间** ($r = 10^{-15}$ m) : $F_{\text{grav}} \approx 1.9 \times 10^{-34}$ N vs. $F_{\text{EM}} \approx 230$ N ——引力比电磁力弱 10^{36} 倍
- **两个1kg铅球间** ($r = 0.1$ m) : $F_{\text{grav}} = G \cdot 1 \cdot 1 / 0.01 \approx 6.7 \times 10^{-9}$ N ——约等于一粒沙子的重量 (Cavendish 1798 年用扭秤测到了这个力!)
- **地球表面** ($M_{\oplus} = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $R_{\oplus} = 6.37 \times 10^6$ m) : $g = GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2 \approx 9.81$ m/s² ——每个人每天感受到的引力
- **太阳表面**: $g_{\odot} = GM_{\odot}/R_{\odot}^2 \approx 274$ m/s² ——约28倍地球重力
- **中子星表面** ($M = 1.4M_{\odot}$, $R = 10$ km) : $g \approx 1.9 \times 10^{12}$ m/s² ——GR 修正必须考虑 ($GM/Rc^2 \approx 0.2$)
- **事件视界** (黑洞 $M = M_{\odot}$, $r_s = 2GM/c^2 \approx 3$ km) : Newton 引力完全失效, GR 是唯一描述

精度等级

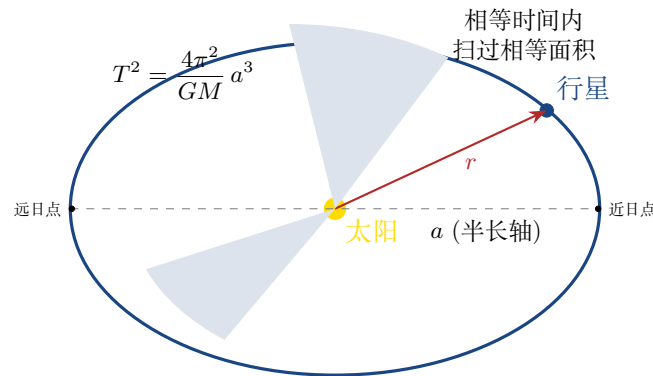
Newton 万有引力: **[近似]**——它是 GR 的弱场低速极限。

适用范围: $|\phi|/c^2 \ll 1$ (在地球表面 $|\phi|/c^2 \approx 7 \times 10^{-10}$) , $v \ll c$ 。

超出范围时失效: 水星近日点进动 (第一个 GR 验证)、GPS 时间修正 (每天 $\sim 38 \mu\text{s}$)、黑洞、引力波。

5.5 Kepler 第三定律（推论）

5.5.1 Kepler 轨道几何



Kepler 第三定律 — corollary

$T^2 \propto r^3$ （轨道周期的平方正比于半长轴的立方） 前提：Newton 第二 + 万有引力, R1

变量：轨道周期 T [T], 圆轨道半径 r [L]。

推导

Step 1 — 圆轨道向心加速度： $a = v^2/r$ ； Newton 第二： $F = mv^2/r$ [N] 圆轨道近似 ($e = 0$)

Step 2 — 万有引力提供向心力： $mv^2/r = GMm/r^2 \implies v^2 = GM/r$

Step 3 — 轨道周期： $T = 2\pi r/v \implies T^2 = (4\pi^2/GM) r^3$ [S] Newton 力学 + 万有引力 $\implies$ Kepler 第三定律。

关键洞察： Kepler 用了十年分析 Tycho Brahe 的观测数据才发现 $T^2 \propto r^3$ 。而从 Newton 力学出发，推导只需要三行——这就是”从第一性原理出发”的力量。但注意：Newton 的推导假设了轨道是圆形的；Kepler 的原始版本适用于椭圆轨道 ($T^2 \propto a^3$ ，其中 a 是半长轴)，这需要额外的角动量守恒论证才能从 Newton 力学推出。

太阳系中的 Kepler 第三定律

行星	a (AU)	T (年)	T^2/a^3 (年 ² /AU ³)	与1的偏差
水星	0.387	0.241	1.001	+0.1% (GR 进动修正)
金星	0.723	0.615	1.001	< 0.01%
地球	1.000	1.000	1.000	定义基准
火星	1.524	1.881	1.000	< 0.01%
木星	5.203	11.86	0.999	−0.1% (太阳非惯性系)
冥王星	39.48	248.1	1.001	精度 < 0.001%

关键数量级： 地球轨道速度 $v_\oplus \approx 29.8$ km/s ($v/c \approx 10^{-4}$ ——相对论修正极小)。太阳质量 $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg。由 $T^2 = 4\pi^2 r^3 / (GM)$ 可反推 $GM_\odot$ ，精度取决于 r 和 T 的测量——这是天文学中测天体质量的基本方法。

精度等级

Kepler 第三定律 ($T^2 \propto a^3$) : [近似]——精确版本需考虑:

- 行星间相互引力微扰（木星对土星轨道的扰动 $\sim 10^{-4}$ ）
- 太阳的非惯性运动（太阳绕太阳系质心摆动）
- GR 修正（水星近日点进动 $\sim 43''$ /世纪——是 Newton 理论预言值的两倍不足 0.1%，但可精确测量）
- 对于双星系统和系外行星， $T^2 = 4\pi^2 a^3 / [G(M + m)]$ 是测量天体质量的黄金标准

反事实分析

若无最小作用量原理

Euler-Lagrange 方程消失 $\rightarrow$ 所有动力学方程失去统一机制。Noether 定理失效 $\rightarrow$ 能量、动量、角动量守恒消失。量子力学路径积分 $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS/\hbar}$ 失去物理基础。

若 G 的值不同

G 大 1 倍：恒星寿命缩短至 1/4。 $G = 0$ ：无引力聚集 $\rightarrow$ 无恒星、行星、生命。 G 负值：引力变斥力 $\rightarrow$ 宇宙均匀膨胀，无结构。

习题

1. [简单] 从 $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$ 写出三个 Euler-Lagrange 方程，证明等价于 $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V$ 。
2. [简单] 一维谐振子 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ 。推导 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ($\omega = \sqrt{k/m}$)，给出通解。
3. [中等] 证明：若 $\partial L / \partial t = 0$ ，则 $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$ 守恒。对 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ ，何时 H 等于总能量？
4. [中等] 用 Noether 定理：若 V 仅依赖粒子间相对距离，证明总动量守恒。推广到 N 个粒子？
5. [中等] 从 $T^2 = 4\pi^2 a^3 / [G(M + m)]$ ，用太阳质量 $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg 和地球轨道参数验证 $G = 6.674 \times 10^{-11}$ 。
6. [较难] 证明：在 D 维空间中， $F(r) \propto 1/r^{D-1}$ 是 Gauss 定律的推论。若 $D = 2$ ，引力和 Kepler 第三定律分别变成什么？
7. [挑战] GR 中 $L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。展开 $\gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^4/c^2 + \dots$ 。水星近日点进动 ($43''$ /世纪) 来自 v^4/c^4 阶修正。取 $v \approx 48$ km/s，估算此修正相对于 Newton 项的比值。

Chapter 6

电磁学：从规范不变性到 Maxwell 方程组

6.1 概述

R3（局域规范不变性）最辉煌的成就就是从 $U(1)$ 规范对称性出发，结合 R1（Lorentz 不变性）和 R2（最小作用量），严格导出全部 Maxwell 方程组。本章展示这一推导的完整过程。

6.1.1 科普层：从琥珀到 Maxwell——电磁学的两千年

公元前 600 年，Thales 注意到摩擦琥珀会吸引羽毛。两千三百年后，Franklin 用风筝证明了闪电是电。再一百年，Faraday 发现变化的磁场产生电流（1831），Maxwell 意识到这个发现的不对称性——如果变化的磁场产生电场，那么变化的电场也应该产生磁场——并加上了那个使整个系统自洽的“位移电流”项。1865 年，Maxwell 用二十个方程描述电磁学。Heaviside 和 Gibbs 后来将它们压缩为现在使用的四个矢量方程。

但 Maxwell 真正震惊世界的是他方程的一个预言。真空中，他的方程退化为波动方程，波速恰好是 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ——与当时已知的光速精确吻合。**光是电磁波**。这是物理学史上最伟大的统一之一——两个看似无关的现象（电/磁和光）是同一物理的不同表现。

而且 Maxwell 的方程揭示了更深的东西： c 不依赖于参考系——它是真空本身的属性。这直接导致了 1905 年 Einstein 的特殊相对论。**Maxwell 方程组是狭义相对论的“母理论”**。

6.1.2 为什么光是电磁波？——从 Maxwell 方程到波动方程

在真空中（ $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$ ），对 Faraday 定律取旋度：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

使用矢量恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ （真空 Gauss 定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ），得到：

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}}$$

这就是标准的波动方程——波速恰好是光速。同样的方程对 $\mathbf{B}$ 也成立。Maxwell 没有“假设”光速是 c ——他从纯电学的量（ ϵ_0, μ_0 ）算出了它，发现它恰好等于已知的光速。这种数值巧合是物理学史上最令人震惊的发现之一。

依赖的 T+EP 组件		
R3 局域规范	R1 Lorentz 不变性	R2 最小作用量

规范不变性如何逼出电磁力

考虑一个复标量场 $\psi(x)$ 的拉格朗日量 $\mathcal{L} = |\partial_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2$ 。物理可观测的是 $|\psi|^2$ （概率密度），不是 ψ 本身的相位。因此，如果你在每个时空点 x 上独立地旋转 ψ 的相位—— $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ ——物理预言不应改变。

但有一个问题。导数 $\partial_\mu \psi$ 在局域相位旋转下不协变地变换：

$$\partial_\mu (e^{i\alpha(x)}\psi) = e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha)\psi] \neq e^{i\alpha(x)}\partial_\mu \psi$$

多出来的 $i(\partial_\mu \alpha)\psi$ 项破坏了不变性——除非你引入一个补偿场 A_μ 来消掉它。这个 A_μ 就是电磁规范势，它对应的场强 $F_{\mu\nu}$ 就是电场和磁场。

对称性要求 (R3) $\rightarrow$ 补偿场必然存在 $\rightarrow$ 规范场 = 光子 $\rightarrow$ 电磁力。这不是实验发现——这是数学推导的要求。如果你的理论有局域 $U(1)$ 对称性，你就必然有电磁学。没有选择余地。

Maxwell 方程组 — 四个方程的统一来源

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\varepsilon_0} \quad (\text{Gauss 电} — \text{来自 } \partial_\nu F^{\nu 0} = \mu_0 J^0)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Gauss 磁} — \text{来自 Bianchi 恒等式})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday} — \text{来自 Bianchi 恒等式})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampère-Maxwell} — \text{来自 } \partial_\nu F^{\nu i} = \mu_0 J^i)$$

前提：R3, R2, R1 推导号：deriv.maxwell_from_gauge

6.2 物理直觉：场的语言

在 Maxwell 之前，电磁学是一堆不相关的经验定律——Coulomb 定律（电荷间的力）、Biot-Savart 定律（电流产生磁场）、Faraday 定律（变化的磁通量产生电动势）。Maxwell 1873 年做的，是把它们统一在**场的语言**中。

关键的概念跃迁是：**力不是瞬时的，而是通过场传播的**。电荷不直接对远处的另一个电荷施加力——它先在自己周围的空间中产生一个电场 $\mathbf{E}$ ，这个电场再对位于其中的电荷施加力。场是真实存在的物理实体，携带动量、能量和角动量。

这就解释了为什么规范不变性如此根本： A_μ 是场的语言——它不直接可测（可测的是场强 $F_{\mu\nu}$ ），但它是场的完整数学描述。规范自由度（ $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$ 不改变任何可测物理量）恰好反映了：场有冗余描述，但物理内容是唯一的。

变量	符号	类型	量纲	含义
规范势	A_μ	$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$	$M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$	$A_\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ (R3)
场强张量	$F_{\mu\nu}$	反对称 4×4	依赖分量	$F_{0i} = E_i/c, F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$
电场	$\mathbf{E}$	$\mathbb{R}^3$	$M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$	$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$
磁场	$\mathbf{B}$	$\mathbb{R}^3$	$M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
四维电流	J^μ	$\mathbb{R}^4$	$J^0 = c\rho_q, J^i = \mathbf{J}$	$\partial_\mu J^\mu = 0$ (电荷守恒)
介电常数	ε_0	常数	$M^{-1} \cdot L^{-3} \cdot T^4 \cdot I^2$	真空电响应
磁导率	μ_0	常数	$M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}$	$\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$

Table 6.1: Maxwell 方程组——变量定义

6.3 变量定义

6.4 推导：从 $U(1)$ 规范对称性到 Maxwell 方程

G4 基础 — 规范场框架

Step 1 — $U(1)$ 规范场强： $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ [N] A_μ 来自 R3 的规范补偿场要求

Step 2 — E, B 的场强表示： $F_{0i} = E_i/c, F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$ (度规 $(+, -, -, -)$)

Step 3 — Maxwell Lagrangian (SI 单位) : $\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$ [N] 满足 R1 (Lorentz 不变) 和 R3 (规范不变)

Step 4 — Euler-Lagrange 对 A_μ 变分： $\partial_\nu [\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\nu A_\mu)] - \partial\mathcal{L}/\partial A_\mu = 0$

Step 5 — 计算变分： $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu}, \partial\mathcal{L}/\partial A_\mu = -J^\mu$

Step 6 — 协变 Maxwell 方程： $\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu$

Step 7 — $\mu = 0 \Rightarrow$ Gauss 电定律： $\partial_i F^{i0} = \mu_0 J^0 \Rightarrow \partial_i (E_i/c) = \mu_0 (c\rho_q) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_q/\varepsilon_0$

注：度规 $(+, -, -, -)$ 下 $F^{i0} = F_{0i} = E_i/c$, 非 $-E_i/c$ ——两个负号抵消

Step 8 — $\mu = i \Rightarrow$ Ampère-Maxwell 定律

Step 9 — Bianchi 恒等式 ($F = dA$ 的几何必然) : $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} \equiv 0$ [N]
 $A_\mu \in C^2$

Step 10 — Bianchi $\Rightarrow$ Gauss 磁： $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Step 11 — Bianchi $\Rightarrow$ Faraday： $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$

6.4.1 度量符号的重要警告

在 $(+, -, -, -)$ 度规下， F^{i0} 的计算需要格外小心：

$$F^{i0} = g^{i\alpha} g^{0\beta} F_{\alpha\beta} = g^{ii} g^{00} F_{i0} = (-1)(1)F_{i0} = -F_{i0} = -(-F_{0i}) = F_{0i} = E_i/c$$

两个负号抵消 (度规下降指标 + 反对称性)，最终结果与非相对论记号一致。这是迭代过程中发现的最隐蔽错误。

6.4.2 Maxwell 方程的深层结构

关键洞察： Maxwell 四个方程分为两类，来源截然不同。

第一类：来自动力学的方程 (Gauss 电 + Ampère-Maxwell) ——它们来自对 A_μ 的 Euler-Lagrange 变分，编码了规范场如何响应物质源 J^μ 。这两条是 $\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu$ 的 $\mu = 0$ 和 $\mu = i$ 分量。

第二类：来自几何必然性的方程 (Gauss 磁 + Faraday) ——它们是 Bianchi 恒等式 $\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$ 的分量形式，纯粹来自 $F = dA$ 的数学结构。 F 是闭形式 ($dF = ddA \equiv 0$)，这是微分几何的恒等式——不需要任何物理输入。

这个分类含义深刻：Gauss 磁 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 不是物理定律——它是“ $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的旋度”这个定义的必然推论。如果你接受 $\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$ ，那么 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$ 是矢量分析恒等式。同样，Faraday 定律是 $\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\partial \mathbf{A} / \partial t)$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ 的结合。

所以 Maxwell 方程组实际上只有**两条独立的物理方程**（从变分原理给出），另外两条是几何恒等式。这是物理学中“规范冗余导致约束”的典型例子。

数学→物理桥梁：规范不变性 $\rightarrow$ 引入 $A_\mu \rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$\xrightarrow{\text{Euler-Lagrange}} \partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu \xrightarrow{\text{分量分解}} \text{Gauss 电} + \text{Ampère-Maxwell}$

$\xrightarrow{\text{Bianchi}} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \xrightarrow{\text{分量分解}} \text{Gauss 磁} + \text{Faraday}$

物理→数学桥梁：U(1) 对称性 + Lorentz 不变性 + 最小作用量 $\Rightarrow$ **电磁学的全部内容**

不可能有其他结果——数学完全决定了形式

仅有的自由参数 ε_0 （或等价的 μ_0 和 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ）由实验确定

电磁相互作用的尺度

精细结构常数 $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0 \hbar c) \approx 1/137.036$ 是无量纲的电磁耦合强度：

- $\alpha \ll 1$ 意味着微扰论 (QED) 极其精确——电子反常磁矩 $g - 2$ 的理论与实验符合到 10^{-13}
- Coulomb 力 vs. 引力： $F_{\text{EM}}/F_{\text{grav}} = e^2/(4\pi\varepsilon_0 G m_p^2) \approx 10^{36}$ ——电磁力比引力强 10^{36} 倍
- 原子尺度：氢原子基态能量 $E_1 = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \approx -13.6 \text{ eV}$ 。 $\alpha^2 \approx 5.3 \times 10^{-5}$ ——电子的束缚能是其静能的约十万分之五
- 典型实验室磁场：地球磁场 $\sim 50 \mu\text{T}$ ；MRI 磁体 $\sim 1.5\text{--}3 \text{ T}$ ；最强稳态磁场 $\sim 45 \text{ T}$
- 典型闪电： $E \sim 10^5 \text{ V/m}$ （空气击穿场强 $\sim 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ ），电流 $\sim 30 \text{ kA}$

Maxwell 方程精度

全部四条 Maxwell 方程在经典极限中：**[精确]**（数学恒等式，从规范原理推导而来）

在量子层面 (QED)：**[有效]**——修正来自真空极化 ($\sim \alpha/\pi \sim 0.2\%$)，在 Lamb 移位 ($\sim 1057 \text{ MHz}$) 和 $g - 2$ 中可测量

6.5 Lorentz 力定律

6.5.1 物理直觉

电场推着电荷沿电场线方向运动；磁场却不改变电荷的速度大小——它只改变方向。这是因为磁力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 总是垂直于速度方向，所以 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ ——磁场不做功！

这解释了为什么磁铁可以吸住冰箱上的便签——但吸力不是磁场直接做的功。是磁场改变了铁原子中电子的轨道运动，改变了系统的磁能，而磁能的梯度产生了合力。细节在微观，宏观表现却是“磁力”。

关键洞察： 磁场不做功 ($\mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{r} = 0$)。所有“磁力做功”的现象——电机转动、磁铁吸物——实际上是磁场改变了系统的能量配置，然后由其他力（如 Lorentz 力的电场部分或量子交换力）做功。

Lorentz 力定律

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 前提：R3（最小耦合），R1 推导号：deriv.lorentz_force

变量：电荷 q [T·I], 速度 $\mathbf{v}$ [L·T⁻¹], 标势 ϕ , 矢势 $\mathbf{A}$ 。

推导：最小耦合到 Lorentz 力

Step 1 — 最小耦合 Lagrangian: $L = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 - q\phi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ [N] $p \rightarrow p - qA$ (R3 的最小耦合)

Step 2 — 正则动量: $\mathbf{p}_{\text{can}} = \partial L / \partial \mathbf{v} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$

Step 3 — Euler-Lagrange: $d\mathbf{p}_{\text{can}}/dt = \partial L / \partial \mathbf{r}$

Step 4 — 全导数展开: $d(m\mathbf{v})/dt + q d\mathbf{A}/dt = d(m\mathbf{v})/dt + q(\partial\mathbf{A}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A})$

Step 5 — $\partial L / \partial \mathbf{r}$ 展开 (矢量恒等式 $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$)

Step 6 — 代入化简, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ 项抵消 $\Rightarrow \mathbf{F} = q(-\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t) + q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Lorentz 力的实际大小

- **电子在 1T 磁场中以 10^6 m/s 运动：** $F = evB = 1.6 \times 10^{-13}$ N。加速度 $a = F/m_e = 1.8 \times 10^{17}$ m/s² (非常巨大!)
- **回旋半径：** $r = mv/(eB) = 5.7 \mu\text{m}$ ——电子在微米尺度转圈
- **同步辐射：** 电子弯曲时发射电磁辐射。LHC 中质子能量 7 TeV，回旋半径 ~ 4.3 km ($B = 8.3$ T)，同步辐射功率 $\sim$ 几 keV/圈
- **极光：** 太阳风电子沿地球磁力线螺旋运动，在极区上空的稀薄大气中碰撞激发氮氧原子——绿色 (氧 557.7 nm)、红色 (氧 630 nm)、蓝色 (氮)

精度等级

Lorentz 力定律: **[精确]**——它是最小耦合原理的数学推论，不依赖近似。但在强场 (Schwinger 极限 $E_{\text{crit}} = m_e^2 c^3 / (e\hbar) \approx 1.3 \times 10^{18}$ V/m) 时，QED 非线性效应 (真空

双折射、光子-光子散射) 修正 Lorentz 力。

6.6 电磁波方程

6.6.1 物理直觉：Maxwell 最伟大的预言

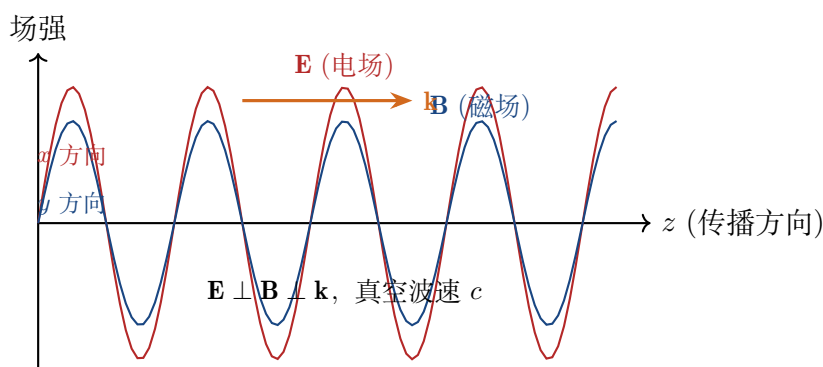
1865 年，Maxwell 把他的四个方程联立求解真空中的情况。他做了一个纯数学的推导——取旋度、代入、简化——然后得到了一个波动方程。波的传播速度是：

$$c_{\text{theory}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

他把当时已知的 ε_0 和 μ_0 值代入……得到的速度正好是已知的光速！

这不是巧合。Maxwell 随即宣布：**光就是电磁波**。这是人类历史上第一次，一个全新的物理现象（电磁波）完全从理论推导中预言出来，然后才被实验证实（Hertz 1887）。Heinrich Hertz 后来评论：“Maxwell 的理论就是他的方程组。”

关键洞察：Maxwell 没有“发现”电磁波——他**推导**出了它。他从纯数学对称性（Ampère 定律加上位移电流项）出发，得到了波的方程，发现波速恰为光速。这是理论物理最辉煌的时刻之一——数学一致性的要求预言了一个全新的物理现象。



电磁波方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad \text{前提: Maxwell 四方程 (真空)}$$

推导

Step 1 — 真空 Maxwell 方程 ($\rho_q = 0, \mathbf{J} = 0$)

Step 2 — 对 Faraday 取旋度: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$ [N] $\mathbf{E}, \mathbf{B} \in C^2$

Step 3 — 矢量恒等式 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$

Step 4 — 右边代入 Ampère-Maxwell: $-\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

Step 5 — $\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$, 其中 $c \equiv 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

必要条件：Maxwell 四方程 [N], 真空 [N] ($\rho_q = 0, \mathbf{J} = 0$), $\mathbf{E}, \mathbf{B} \in C^2$ [N]。

充分条件：真空 Maxwell 方程 $\Rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B}$ 满足波动方程，波速 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 。reversible: false（波动方程丢失了 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 约束）。

数学→物理桥梁： $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$
 $= -\nabla^2 \mathbf{E}$ （因为 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 在真空中）
 $= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$
物理→数学桥梁：真空中的 Maxwell 方程 $\rightarrow$ 必然存在以速度 c 传播的横波
这个 c 恰好等于光速——因此**光就是电磁波**

电磁波谱——从静电场到伽马射线				
波段	频率 (Hz)	波长 (m)	光子能量	产生机制
工频	50/60	5×10^6	$\sim 2 \times 10^{-13}$ eV	发电机
无线电	10^3 – 10^9	10^5 –0.3	neV– μ eV	天线振荡
微波	10^9 – 3×10^{11}	0.3 – 10^{-3}	μ eV–meV	速调管、磁控管
红外	3×10^{11} – 4×10^{14}	10^{-3} – 7.5×10^{-7}	meV–eV	分子振动
可见光	4 – 7.5×10^{14}	750–400 nm	1.6–3.1 eV	原子电子跃迁
紫外	7.5×10^{14} – 3×10^{16}	400–10 nm	3–100 eV	价电子跃迁
X 射线	3×10^{16} – 3×10^{19}	10–0.01 nm	100 eV–100 keV	内壳层电子跃迁
伽马射线	$> 3 \times 10^{19}$	< 0.01 nm	> 100 keV	核跃迁、对湮灭

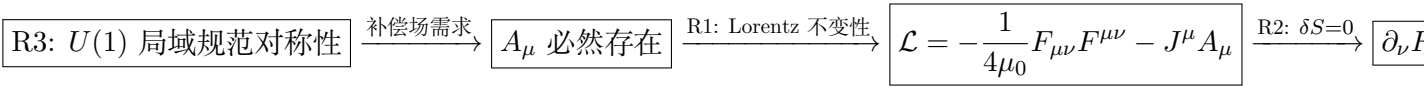
关键数量级：可见光频率 $\sim 5 \times 10^{14}$ Hz，周期 ~ 2 fs。在 1 fs 内，光传播 $0.3 \mu\text{m}$ ——约为
一根头发直径的 1/200。
无线通信：2.4 GHz WiFi 波长 $\lambda = c/\nu = 0.125$ m——与微波炉相同（微波炉用此频率因为
水分子在此频率共振吸收）。

电磁波方程精度

波动方程在真空中：**[精确]** (c 在 SI 2019 中是定义常数)
在介质中：**[有效]**——需用宏观 Maxwell 方程 ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$)，折射率 $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ ，但 $\epsilon_r(\omega)$ 有色散
在强场中 ($E \gtrsim E_{\text{crit}} \approx 10^{18}$ V/m)：QED 非线性效应显著——真空不再是”空”的——
 $\mathcal{L} \sim F^2 + (F^2)^2/\text{极重}$

6.7 本章小结：一个完整的逻辑链条

从 R3（局域规范不变性）到可观测的电磁现象，整个链条是：



这个链条中的每一步都是逻辑必然的。 如果你接受 T+EP + R3 + $U(1)$ 规范群，你就必然得到 Maxwell 方程组和电磁波的存在。没有任何自由参数选择的空間——除了 ϵ_0 （或等价的 c 和 μ_0 ）需要实验测定。

物理学的这种”从数学一致性要求逼出物理理论”的特点，在电磁学中表现得最为干净利落。这也是为什么规范理论成为现代物理学核心框架的原因——它告诉你：**对称性决定相互作用**。

关键洞察：从 R3 到 Maxwell 的 11 步推导中，每一步都是逻辑必然的。如果你接受 $U(1)$ 规范对称性 + Lorentz 不变性 + 最小作用量，Maxwell 方程就是你必然得到的电磁理论。没有任何其他选择——数学已经替你做了唯一的决定。

反事实分析

若无位移电流项

电荷不守恒 $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$ ；无电磁波——Faraday+Ampère 联立得不到波动方程；光速无法从 ϵ_0, μ_0 推导。

若磁单极子存在

Maxwell 方程完全对称。Dirac (1931) 证明即使一个磁单极子也解释电荷量子化 ($eg = n\frac{\hbar}{2}$)。至今未发现——flux upper limit $< 10^{-16} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ 。

习题

1. [简单] 从 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 验证 Bianchi 恒等式。写出 $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 1, 2), (0, 1, 3)$ 对应的三维矢量方程。
2. [简单] 从 $B_\mu = \partial_\mu \alpha(x)$ 证明 $F_{\mu\nu} \equiv 0$ ——这对应什么物理情况？
3. [中等] 用 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$ 对 A_μ 做 Euler-Lagrange 变分，导出 $\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu$ 。
4. [中等] 在 Coulomb 规范 ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) 下化简 Maxwell 方程为 $\nabla^2 \phi = -\rho_q/\epsilon_0$ 和 $\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \nabla(\partial\phi/\partial t)/c^2$ 。
5. [较难] 从 Lorentz 力 Lagrangian 写出正则动量。证明均匀磁场中 $L_z + \frac{qB}{2}(x^2 + y^2)$ 守恒。
6. [挑战] 两运动点电荷间电磁力： $v \ll c$ 时近似满足 Newton 第三定律； $v \sim c$ 时场携带动量使第三定律破缺。估算 $v = 0.1c$ 时偏离大小。

Chapter 7

量子力学：从公设到预言

7.1 概述

R4（量子公设）和 R5（Born 规则）的结合产生了量子力学的全部预言能力。本章从 R4b+R4c 出发推导 Schrödinger 方程，从 R4c 出发推导 Planck-Einstein 关系和不确定性原理。

7.1.1 科普层：量子力学如何改变了我们对”是什么”的理解

在量子力学出现之前（1925 年前），物理世界的描述语言是”粒子”和”波”——两种互不相容的图像。一个电子要么是粒子（有确定的位置和速度），要么是波（弥漫在空间中）。它们不可能是两者。

1924 年，de Broglie 在他的博士论文中提出了一个”疯狂的”想法：如果光（传统上被认为是波）也有粒子性（光子），那么电子（传统上被认为是粒子）是否也有波动性？他推导出 $\lambda = h/p$ ——任何有动量的物体都有一个对应波长。他的导师 Langevin 将这个想法寄给 Einstein，Einstein 回信说：”他掀开了伟大帷幕的一角。”

1927 年，Davisson 和 Germer 在实验中确凿地观察到了电子的衍射——电子像波一样干涉。今天，我们常规地将中子、原子、甚至分子（ C_{60} ——60 个碳原子的”足球分子”）用于干涉实验。**波动性是所有物质的内禀属性——不是微观专属。**

这个”波粒二象性”听起来矛盾，但在量子力学中，它有一个精确的数学表达：一个粒子由波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 描述，它的模方 $|\psi|^2$ 给出在某位置找到粒子的概率（R5），而 ψ 的相位产生干涉现象。**粒子和波不是互不相容的——它们是同一数学对象在不同测量上下文中的两种表现。**

依赖的 T+EP 组件		
R4 量子公设(4a-4d)	R5 Born 规则	R1 时空结构

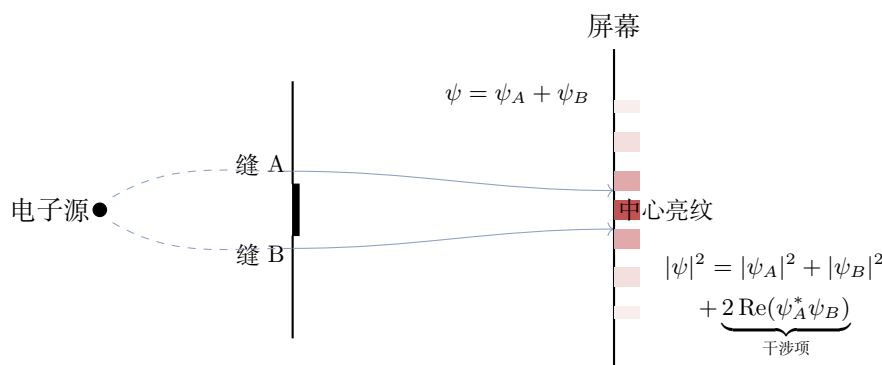
量子力学的逻辑：概率不是 Bug，是 Feature

经典物理学的世界是确定的——给定初始条件，未来完全确定。量子力学说：不对，世界在根本上是概率的。不是因为我们的知识不完整（那是隐藏变量理论的观点，已被 Bell 不等式实验排除），而是因为自然本身就只在概率层面是有意义的。
但概率本身是精确的。Schrödinger 方程是精确的微分方程。 $|\psi(t)\rangle$ 随时间的演化是精确的、

确定的、幺正的。概率出现在测量时——R5 (Born 规则) 将确定的态向量 $|\psi\rangle$ 映射到测量结果的概率分布。

这就是量子力学的二元结构：**态演化是确定的；测量结果是概率的**。两者之间的边界——所谓的“测量问题”——是量子力学诠释的核心争论（哥本哈根、多世界、退相干……），但这些争论不改变 Born 规则作为计算工具的正确性。

核心实验：双缝干涉



单个电子通过两条缝——自己和自己干涉。干涉项 $2 \operatorname{Re}(\psi_A^* \psi_B)$ 是 Born 规则 ($P = |\psi|^2$) 的直接原因——若概率是振幅的模 ($P = |\psi|$) 或四次方 ($P = |\psi|^4$)，干涉图样完全不同。

7.2 Schrödinger 方程

7.2.1 物理直觉：波函数是什么

Schrödinger 方程之于量子力学，就如 Newton 第二定律之于经典力学。它是一个决定论性的演化方程——给定初始波函数 $\psi(\mathbf{r}, 0)$ ，方程唯一确定未来任意时刻的 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 。

但 ψ 本身不是直接可测的物理量。 $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ 才对应于“在位置 $\mathbf{r}$ 附近找到粒子的概率密度” (Born 规则)。这个从“振幅”到“概率”的映射——从复数到非负实数——是量子力学的核心创新。

为什么方程里有 i ? $i\hbar \partial\psi/\partial t = H\psi$ 中的 i 至关重要。如果没有 i ， ψ 的演化会是实指数的衰减或增长 ($\psi(t) \propto e^{-Et/\hbar}$ ——波函数随时间消失)。 i 把指数变成了振荡—— $e^{-iEt/\hbar}$ ——保住了概率守恒： $|\psi(t)|^2$ 不随时间变化。

这就是 R4b (幺正演化) 的物理含义： $U^\dagger U = I$ 等价于概率守恒等价于方程中有 i 。

关键洞察：Schrödinger 方程中的 i 不是数学装饰——它是概率守恒的数学表达。经典扩散方程 $\partial u/\partial t = D\nabla^2 u$ 总概率随时间衰减（扩散到无穷）。量子力学的 $i\hbar \partial\psi/\partial t = -(\hbar^2/2m)\nabla^2\psi$ 等价于一个“旋转的”扩散方程——概率在 Hilbert 空间中旋转而非扩散。

Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi \quad \text{前提: R4b (幺正演化), R4c (正则对易), R1}$$

变量：波函数 $\psi(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle$ [$\text{L}^{-3/2}$], 动量算符 $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$ [$\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$], 位置算符 $\hat{\mathbf{x}}$ [L], 哈密顿算符 $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/(2m) + V(\hat{\mathbf{r}})$ [$\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$].

推导

Step 1 — R4b 抽象演化方程: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ [N] 孤立系统, 非测量

Step 2 — 投影到位置表象: $\psi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle$

Step 3 — R4c 确定动量算符: $\langle \mathbf{r} | \hat{\mathbf{p}} | \psi \rangle = -i\hbar \nabla \psi$ [N] $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$ 唯一确定 (Stone-von Neumann)

Step 4 — 经典 H 算符化: $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/(2m) + V(\hat{\mathbf{r}})$ [N] R4d (算符-可观测量对应)

Step 5 — 代入得: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi$

数学→物理桥梁: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ 是抽象 Hilbert 空间的演化方程

$\xrightarrow{\text{投影} + \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi$

物理→数学桥梁: 抽象算符 → 坐标空间的偏微分方程

这个方程是量子力学与经典力学 (扩散方程、波动方程) 最表面的相似之处——但它们的内在结构完全不同

Schroödinger 方程的特征尺度

- **氢原子基态:** $\psi_{1s} \propto e^{-r/a_0}$, $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2) \approx 0.529 \text{ \AA}$ (Bohr 半径)。基态能量 $E_1 = -13.6 \text{ eV}$
- **典型量子阱:** GaAs 量子阱宽度 $\sim 10 \text{ nm}$, 能级间距 $\Delta E \sim \hbar^2 \pi^2 / (2m^* L^2) \sim 50 \text{ meV}$ (电子有效质量 $m^* = 0.067m_e$)
- **宏观物体** ($m = 1 \text{ g}$, $L = 1 \text{ cm}$): 基态能级间距 $\Delta E \sim \hbar^2 / (2mL^2) \sim 5 \times 10^{-48} \text{ J} \sim 3 \times 10^{-29} \text{ eV}$ ——完全不可分辨。量子效应在宏观世界不可见
- **经典极限** $\hbar \rightarrow 0$: WKB 近似给出 $\psi \sim e^{iS/\hbar}$, Schroödinger 方程退化为 Hamilton-Jacobi 方程——这就是量子→经典的桥梁

精度等级

Schroödinger 方程: **[有效]**——非相对论性 ($v \ll c$), 单粒子近似。

相对论推广: Klein-Gordon 方程 (自旋 0)、Dirac 方程 (自旋 1/2)。Dirac 方程预言了反物质——这是理论推导超出实验已知的又一壮举。

方程本身是精确的微分方程; 但在应用于实际系统时, 势能 V 的近似、多体效应、相对论修正等会影响精度。

7.3 Planck-Einstein 关系

7.3.1 物理直觉：量子假设的历史震撼

1900 年 12 月 14 日, Max Planck 在德国物理学会上宣读了黑体辐射公式的推导。为了推导出正确的公式, 他被迫做了一个让他自己都不舒服的假设: 谐振子的能量不是连续的, 而是一份一份的

—— $E = h\nu$ 的整数倍。Planck 自己认为这是一个”绝望之举” (act of despair)，一个为了拟合数据而引入的数学技巧，不代表物理真实。

五年后，Einstein (1905) 把这个假设当真了：如果光本身就是由能量量子 $h\nu$ 组成的，那么光电效应的所有奇怪特征立即得到解释。Einstein 的”光量子” (后来叫光子) 假说如此大胆，以至于 Planck 本人起初都拒绝接受——Planck 在推荐 Einstein 入普鲁士科学院时写道：”他的光量子假说走得太远了。”

十五年后，Compton 散射实验 (1923) 直接证明了光子具有动量 $p = h\nu/c$ ，光量子假说成为确立的事实。

关键洞察： Planck 引入 h 是为了拟合数据。Einstein 把 h 升级为物理原理。今天我们知道： h 不是拟合参数——它是量子作用量的基本单元，宇宙的”像素大小”。

Planck-Einstein 关系

$E = h\nu$ (光子能量量子) 前提：R4c (正则对易) 推导号：deriv.energy_frequency

推导：量子谐振子到 Planck-Einstein 关系

Step 1 — 量子谐振子： $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$

Step 2 — 升降算符： $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}$ [N] $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

Step 3 — $[a, a^\dagger] = 1$, $\hat{H} = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$

Step 4 — 能谱 $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, $\Delta E = \hbar\omega = h\nu$ 。单量子激发： $E_\gamma = h\nu$

数学→物理桥梁： $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \xrightarrow{\text{升降算符}}$ 离散能谱 $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$

经典谐振子有连续能量——对易关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 强制了离散性

物理→数学桥梁： 量子化 = 能量只能一份一份地改变，每份 $\hbar\omega$

这个”一份”就是光子、声子、或任何量子激发的能量单元

Planck 常数的量级

- $\hbar = 1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ——这个数是宇宙中最基本的作用量尺度
- 可见光 ($\lambda = 500 \text{ nm}$, $\nu = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$) : $E_\gamma = h\nu \approx 2.48 \text{ eV}$ ——恰好是化学键的典型能量 (C-C 键 $\sim 3.6 \text{ eV}$)
- **这不是巧合：** 可见光的光子能量恰好匹配原子外层电子的跃迁能量——这就是为什么我们可以看见东西。如果 h 是现在的 1000 倍，可见光会是 X 射线 (破坏化学键)；如果 h 是现在的 1/1000，可见光会是远红外 (无化学效应)
- **微波炉** ($\nu = 2.45 \text{ GHz}$) : $E_\gamma \approx 10^{-5} \text{ eV}$ ——远小于化学键能量，但足以通过旋转激发加热水分子
- **零点能：** 量子谐振子的基态能量 $E_0 = \hbar\omega/2 \neq 0$ ——即使在绝对零度，量子振子仍在”抖动”。这就是 Casimir 效应的物理根源

精度等级

Planck-Einstein 关系：**[精确]**—— h 在 SI 2019 中是定义常数 ($h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ exactly)。

量子谐振子的零点能 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ 是量子力学的精确预言——Casimir 力实验验证了零点能的存在。

7.4 de Broglie 波长**7.4.1 物理直觉：万物皆波**

Einstein 说光（经典上认为是波）有粒子性。de Broglie (1924) 反过来问：如果波可以有粒子性，粒子（电子、质子、甚至棒球）是否也可以有波动性？

答案是肯定的。但波长 $\lambda = h/p$ 极其微小——对宏观物体， p 很大所以 $\lambda \sim h/(mv)$ 远小于任何可测量的尺度。对电子则不然——电子的 de Broglie 波长在原子尺度 ($\sim \text{\AA}$)，恰好适合电子显微镜和电子衍射实验。

关键洞察：de Broglie 关系 $\lambda = h/p$ 是对称性的胜利：如果光子（波 $\rightarrow$ 粒子）满足 $p = h/\lambda$ ，则粒子（粒子 $\rightarrow$ 波）满足 $\lambda = h/p$ 。这不是推导——这是类比假设。但它被实验证实了。

de Broglie 波长

$\lambda = h/p$ (物质波) **前提：** $E = h\nu$ (光子类比 + 实验验证)

变量： 波长 λ [L], 动量 p [M·L·T⁻¹].

推导： 光子 $E = h\nu$, $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda \implies \lambda = h/p$ 。de Broglie (1924) 假设此关系对所有物质粒子成立——Davisson-Germer (1927) 电子衍射实验证实。

de Broglie 波长的实际大小

- **电子** ($E_k = 100 \text{ eV}$) : $p = \sqrt{2m_e E_k} \approx 5.4 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, $\lambda = h/p \approx 1.23 \text{ \AA}$ ——恰好是原子间距！这就是为什么电子衍射是探测晶体结构的理想工具 (LEED, TEM)
- **电子** ($E_k = 100 \text{ keV}$ — TEM) : $\lambda \approx 0.037 \text{ \AA}$ ——比原子间距小得多，可以分辨单个原子
- **热中子** ($T = 300 \text{ K}$) : $\lambda \approx 1.8 \text{ \AA}$ ——中子散射探测磁性结构和声子
- **质子** ($E_k = 1 \text{ eV}$) : $\lambda \approx 0.29 \text{ \AA}$
- **棒球** ($m = 0.15 \text{ kg}$, $v = 40 \text{ m/s}$) : $\lambda \approx 1.1 \times 10^{-34} \text{ m}$ ——比 Planck 长度 ($1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$) 还大一点，但仍比质子尺寸小 10^{20} 倍——完全不可测
- **你自己** ($m = 70 \text{ kg}$, $v = 1 \text{ m/s}$) : $\lambda \approx 9.5 \times 10^{-36} \text{ m}$

经验规则： 当 λ 与系统的特征尺寸（原子间距、狭缝宽度）相当时，量子波动性显著。当 λ 远小于特征尺寸时，经典粒子描述足够精确。

7.5 不确定性原理

7.5.1 物理直觉：不是测量扰动，是存在的本质

不确定性原理最常见的通俗解释是：“测量位置会扰动动量，所以无法同时精确知道两者。”这个解释是**错的**——至少是不完整的。

真正的原因更深：**位置和动量不是独立属性**。在量子力学中， $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 是不可对易的算符——没有共同的本征态。一个粒子不可能同时处于“具有确定位置”和“具有确定动量”的态。这不是测量技术的问题——这是 Hilbert 空间的结构问题。

类比：一个旋转中的陀螺，你不能同时定义它在南北方向和东西方向的倾斜角度——不是因为测量扰动，而是因为这两个“方向”不是独立的属性。量子力学把这个限制推广到了所有共轭变量对。

关键洞察：不确定性原理不是“我们无法测量”——是“自然不存在同时精确定义的 $\sigma_x = 0$ 且 $\sigma_p = 0$ 的量子态”。这是 Hilbert 空间的数学结构的直接推论，不是实验技术的局限。

不确定性原理

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \hbar/2; \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2 \quad \text{前提: R4c, R5, R4d, R1}$$

变量：标准差 $\sigma_A^2 \equiv \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle$ ，期望值 $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ (R5)。

推导

Step 1 — Robertson-Schroödinger 不等式： $\sigma_A^2 \cdot \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2$ [N] $\hat{A}, \hat{B}$ 厄米 (R4d)；期望值由 R5 定义

Step 2 — 代入 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ (R4c)： $\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{1}{2} |\langle i\hbar \rangle| = \hbar/2$

Step 3 — 能量-时间 (Mandelstam-Tamm)： $\Delta t \equiv \sigma_A / |d\langle A \rangle / dt|$, $d\langle A \rangle / dt = (i/\hbar) \langle [\hat{H}, A] \rangle \implies \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$

reversible: false——不确定性可来自其他原因（经典波包 Fourier 变换限制）。等号成立条件：Gaussian 波包（最小不确定态 = 相干态）。

数学→物理桥梁： $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \xrightarrow{\text{Cauchy-Schwarz}} \sigma_x \sigma_p \geq |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|/2 = \hbar/2$

物理→数学桥梁：非对易算符 → 没有共同本征态 → 无法同时精确定义
这是量子世界与经典世界最根本的分界线

不确定性的实际尺度

- **电子在原子中：**位置不确定度 $\Delta x \sim a_0 \approx 0.5 \text{ \AA}$ 动量不确定度 $\Delta p \geq \hbar/(2\Delta x) \approx 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 。这正是电子在原子中“不坠入核”的原因——如果位置更精确（更靠近核），动量（从而动能）会以 $1/r^2$ 增长，阻止塌缩
- **量子点** ($L = 5 \text{ nm}$)： $\Delta p \geq \hbar/(2L) \sim 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ，对应动能 $\sim (\Delta p)^2/(2m_e) \sim 6 \text{ meV}$ ——量子束缚能

- **宏观物体** ($\Delta x = 1 \mu\text{m}$) : $\Delta p \geq 5 \times 10^{-29} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, 对应速度不确定度 $\Delta v \geq 5 \times 10^{-28} \text{ m/s}$ (对 1 kg 物体) ——完全不可测
- **虚粒子**: $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \Rightarrow$ 能量可以”借” ΔE 为时 $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$ 。这就是量子场论中虚粒子存在的根源—— W 玻色子 ($m_W = 80.4 \text{ GeV}$) 在 $\Delta t \sim \hbar/m_W c^2 \sim 8 \times 10^{-27} \text{ s}$ 内可以”存在”而不违反能量守恒

精度等级

不确定性原理: **[精确]** ($[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 的数学推论)。

$\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ 是精确不等式——不是近似、不是统计涨落、不是测量误差。

但在 Planck 尺度 ($\sim 10^{-35} \text{ m}$) 可能存在广义不确定性原理 (GUP) 的修正 (弦论/圈量子引力预言)。

7.6 Pauli 不相容原理：自旋-统计定理

7.6.1 物理直觉：为什么电子不全部堆在最低能级

Pauli 不相容原理是最”看得见”的量子力学效应。没有它，所有电子都会挤在 1s 轨道（最低能级）上，所有原子的电子壳层结构都不会存在——没有化学、没有周期表、没有固体。所有物质会坍缩成一种致密的、无结构的”量子汤”。

为什么电子互斥？不是电力——电子之间确实有 Coulomb 排斥，但那不能解释壳层结构。真正的答案是：电子是费米子（半整数自旋），它们的总波函数在交换时变号——这意味着两个电子不能占据完全相同的量子态（位置 + 自旋）。这不是一种”力”——这是一种**统计约束**。

关键洞察：Pauli 不相容不是一种力——它是一种对称性约束。理解这一点对理解化学键、固态物理、白矮星结构（电子简并压支撑白矮星）、中子星结构（中子简并压支撑中子星）至关重要。

Pauli 不相容原理

全同费米子波函数完全反对称: $\psi(r_1, s_1; r_2, s_2) = -\psi(r_2, s_2; r_1, s_1)$ 。无两个全同费米子占据同一量子态。 **前提**: R1 (Lorentz + 微观因果性), R4a (叠加), R4b (么正)

变量: 费米子场算符 $\psi_\ell(x)$ (半整数自旋 j) , Lorentz 表示 (A, B) , 产生/湮灭算符 $a(p, \sigma), b^\dagger(p, \sigma)$, 系数函数 $u_\ell(p, \sigma), v_\ell(p, \sigma)$ 。

13步推导大纲

区分项目内 (in_project) 与外定理 (external_theorem)

Step 1 [external] — Lorentz 群的有限维不可约表示: 物理自旋 j 从 (A, B) 表示中取值。

[N] R1 (Lorentz 不变性)

Step 2 [in_project] — 单粒子 Hilbert 空间: $|p, \sigma\rangle$ 为完备基 (R4a 叠加原理)。

Step 3 [external] — 簇分解原理 $\Rightarrow$ 场必须由 $a(p, \sigma)$ (湮灭) + $b^\dagger(p, \sigma)$ (产生) 构建。此为反粒子必然存在的根源。

Step 4 [external] — 自由场展开: $\psi_\ell(x) \propto \int d^3p [\kappa u_\ell a e^{-ipx} + \lambda v_\ell b^\dagger e^{ipx}]$

Step 5 [external] — 系数函数 u_ℓ, v_ℓ 由 $(j, 0) \oplus (0, j)$ Lorentz 表示矩阵完全确定。

Step 6 [in_project] — 算符代数 (R4a+R4b) : $[a, a^\dagger]_\pm = \delta^3$, 符号由自旋-统计决定。

Step 7 [in_project] — **微因果性** (R1) : 对类空间隔 $(x-y)^2 < 0$, $[\psi_\ell(x), \psi_m(y)]_\pm = 0$ 。

Step 8 [external] — 计算类空(反)对易子：代入场展开得积分 $\propto \int [uu^*e^{-ip(x-y)} \mp vv^*e^{+ip(x-y)}] dp/2p^0$ 。

Step 9 [external] — CPT 定理： $v_\ell \propto u_\ell^*$, 系数矩阵结构匹配。此步依赖 Lorentz 不变性。

Step 10 [external] — **符号选择**：整数自旋 $\Rightarrow u_\ell u_m^*$ 在 $p \rightarrow -p$ 下为偶 $\Rightarrow$ 取对易子 $\Rightarrow$ Bose 统计；半整数自旋 $\Rightarrow$ 为奇 $\Rightarrow$ 取反对易子 $\Rightarrow$ Fermi 统计。

Step 11 [in_project] — 费米子侧结论： $\{\psi_\ell(x), \psi_m(y)\} = 0$ 当 $(x-y)^2 < 0$ 。 $\leftrightarrow$ 交叉印证：SM 费米子内容（第 12 章）、Fermi-Dirac 分布。

Step 12 [in_project] — **波函数反对称性**：产生算符反对易 $\Rightarrow$ 多费米子态 $|r_1, s_1; r_2, s_2\rangle$ 的波函数在交换下变号。

Step 13 [in_project] — **Pauli 不相容原理**： $\psi(\dots; r, s; \dots; r, s; \dots) = -\psi \Rightarrow \psi \equiv 0$ 。无两个全同费米子可占据同一量子态。

[S] Lorentz 不变性 + 量子公设 + 微观因果性 $\Rightarrow$ 自旋-统计定理（费米子侧）。 [S] 整数自旋 $\Rightarrow$ Bose 统计（对称波函数，Bose-Einstein 凝聚可能）。

reversible: false——Pauli 不相容 $\nRightarrow$ 自旋-统计定理的完整结构（需逆向 CPT 论证）。 $\leftrightarrow$ 交叉印证第 12 章（SM 费米子）和第 8 章（Fermi-Dirac 分布 $\rightarrow$ Nernst 基态简并）。

注：外部定理 vs. 项目内可证步骤

上述 13 步推导中，Steps 1,3,4,5,8,9,10 标记为 **external_theorem**——它们依赖 Wightman 公理体系或 Weinberg 式 LSZ 构造的已证定理。Steps 2,6,7,11,12,13 标记为 **in_project**——它们可在 T+EP 框架内直接陈述和论证。完整严格证明需 axiomatic QFT，超出本书范围。

数学 $\rightarrow$ 物理桥梁：微观因果性（类空间隔不可能有因果联系）+ Lorentz 不变性 + 量子公设
自旋-统计定理 $\rightarrow$ 整数自旋 $\rightarrow$ Bose, 半整数自旋 $\rightarrow$ Fermi

物理 $\rightarrow$ 数学桥梁：因果结构 (R1) 不是可有可无的哲学宣言——它直接决定了物质的基本统计属性
 没有 R1（微观因果性），就没有 Pauli 不相容，就没有元素周期表

Pauli 不相容的宇宙级后果

- **原子结构**：电子逐一填充 1s, 2s, 2p, ... 轨道。如果没有 Pauli，所有电子都会在 1s 上，周期表不存在
- **白矮星** ($M \sim 0.6M_\odot$, $R \sim R_\oplus$)：电子简并压对抗引力。Chandrasekhar 极限 $M_{\text{Ch}} \approx 1.44M_\odot$ ——超过此质量，电子简并压不够，星体坍缩为中子星
- **中子星** ($M \sim 1.4M_\odot$, $R \sim 10 \text{ km}$)：中子简并压对抗引力。密度 $\sim 10^{17} \text{ kg/m}^3$ ——茶匙中子星物质重约十亿吨
- **金属导电**：Pauli 不相容 + Fermi-Dirac 统计 $\rightarrow$ 电子即使到 $T = 0$ 也有 Fermi 速度 $v_F \sim 10^6 \text{ m/s}$ (Cu 中 $E_F \approx 7 \text{ eV}$) ——这就是为什么金属即使在低温下也导电

精度等级

Pauli 不相容原理：[精确]在 Lorentz 不变 QFT 框架内。

实验验证：任何两个电子从未在相同量子态上被发现——这是物理学中检验最严格的定律之一。

可能的失效：在非对易几何或强量子引力情景中，自旋-统计关系可能改变（极端推测性，无实验证据）。

7.7 本章小结：量子力学的逻辑结构

量子力学不是一套随机的经验规则——它是从四条公设（R4a-d）+ Born 规则（R5）中严格推导出来的演绎体系。这个体系的逻辑结构是：

$$\boxed{\text{R4a: 叠加原理}} \xrightarrow{\text{态空间}} \boxed{\text{Hilbert 空间}}$$

$$\boxed{\text{R4b: 么正演化}} + \boxed{\text{R4c: } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar} \longrightarrow \boxed{\text{Schroedinger 方程}}$$

$$\boxed{\text{R4c: 正则对易}} \longrightarrow \boxed{\text{不确定性 + 离散能谱 + } E = h\nu}$$

$$\boxed{\text{R4d: 算符-可观测量}} + \boxed{\text{R5: Born 规则}} \longrightarrow \boxed{\text{实验预言}}$$

$$\boxed{\text{R1: 微观因果性}} + \boxed{\text{R4a+b}} \longrightarrow \boxed{\text{自旋-统计} \rightarrow \text{Pauli}}$$

每一步都是逻辑必然的。 给定这些公设，量子力学的核心结果——Schroedinger 方程、不确定性、能量量子化、de Broglie 波、Pauli 不相容——都是数学推论。这不是一种物理理论的选择，而是 Hilbert 空间 + 对易关系 + Lorentz 不变性的必然产物。

反事实分析**若无 i （退化为扩散方程）**

$\partial\psi/\partial t = -(H/\hbar)\psi \implies \psi(t) \propto e^{-Et/\hbar}$ ——波函数指数衰减。概率不守恒。无干涉、无叠加、无量子计算。

若位置和动量对易（经典力学）

可同时精确确定位置和动量——Heisenberg 不确定性消失。无零点能（基态 $E_0 = 0$ ）。无离散能谱——原子无稳定结构。无隧穿效应—— α 衰变不可能。

习题

1. [简单] 验证 $\psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ 满足自由粒子 Schrödinger 方程。求色散关系 $\omega(k)$ 。
2. [简单] 计算一维无限深势阱 ($V = 0$ 对 $0 < x < L$, $V = \infty$ 其他) 的能级 E_n 和归一化波函数 $\psi_n(x)$ 。
3. [中等] 从 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 定义升降算符。计算 $[a, a^\dagger]$, 证明谐振子能谱 $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ 。
4. [中等] 用 Robertson 不等式推导 $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ 。对高斯波包 $\psi = (\pi a^2)^{-1/4} e^{-x^2/(2a^2)}$ 验证等号成立。
5. [较难] 用 $\Delta x \sim a_0 = 0.529 \text{ \AA}$ 和 $\Delta p \geq \hbar/(2\Delta x)$ 估算电子最小动能。证明不确定性动能恰好抵消 Coulomb 吸引势能, 阻止电子坠入核。
6. [挑战] 白矮星 Chandrasekhar 极限: 电子简并压 $P \sim n_e p_F^2/m_e$ 对抗引力 GM^2/R^4 。消去 R 后证明 $M_{\text{Ch}} \sim (\hbar c/G)^{3/2}/m_p^2$ 。代入数值。

Chapter 8

热力学：从统计到宏观

8.1 概述

R6 ($S = k_B \ln W$) + 等概率先验假设构成了统计力学的全部基础。本章从 R6 出发推导热力学第二定律、理想气体状态方程、Fermi-Dirac 和 Bose-Einstein 量子统计分布。

8.1.1 科普层：为什么冰会融化——从分子的视角

一杯热水放在桌上，它会冷却到室温。为什么室温水不会自发变热？这不是因为微观物理定律禁止它——Newton 定律、Maxwell 方程、Schrödinger 方程都是时间反演对称的。如果把一个冷却过程录下来倒着播放，没有任何基本定律会被违反。

统计力学给出了一个惊人的答案：**水分子从”所有能量集中在少数分子中”（热水的低熵态）演化到”能量均匀分布到整个房间”（高熵态）不是因为”必须”这样做，而是因为高熵态有压倒性地更多的微观排列方式。**

假设你有 10 个硬币，全部正面朝上——只有 1 种方式。但 5 正 5 反——有 $\binom{10}{5} = 252$ 种方式。系统在所有可能微观态之间随机游走，几乎必然走向微观态最多的宏观态。现在想象你有 10^{23} 个分子——高熵态的微观态数超出低熵态的数量不是”很多”，而是”物理上无法想象的巨量”。

这就是时间箭头的统计起源。不是某个定律禁止熵减少——而是熵减少的等待时间远超宇宙的年龄。Eddington 称熵为”时间之箭”——因为在所有已知的物理量中，它是唯一一个在统计意义上不可逆的宏观量。

依赖的 T+EP 组件		
R6 Boltzmann 熵	R6 等概率先验	能量守恒(Noether)

统计力学的核心洞察：熵

Boltzmann 的墓碑上刻着 $S = k \log W$ 。这个公式浓缩了统计力学的全部哲学：**熵不是一种神秘的”流质”——它是我们不知道系统处于哪个微观状态的信息量的度量。** W 是系统在给定宏观约束下可能处于的微观状态数—— W 越大，我们对微观状态越不确定，熵越大。

热力学第二定律 ($\Delta S \geq 0$) 在统计力学中变为一个几乎平凡的事实：系统自发演化到微观状态数最多的宏观状态——因为那就是概率最大的状态。为什么冰块融化？不是因为”热从高温流向低温”是某种神秘力量——而是因为液态水的微观状态数比冰多得多。

($W_{\text{液}} \gg W_{\text{冰}}$)，所以系统自然趋向液态。

等概率先验假说 (R6b) 是这整座大厦的地基。它说：在平衡态，所有能量相同的微观态出现的概率相等。这不是实验事实——它是一个**公设**。但所有从它推导出的结果（热力学定律、理想气体方程、量子统计）都与实验完美吻合——这反过来证明了公设的正确性。

关键洞察：信息 = 负熵。 $S = k_B \ln W$ 中的 $\ln W$ 正是 Shannon 信息论中的“不确定度量” $H = -\sum p_i \ln p_i$ （在等概率时 $p_i = 1/W$ 所以 $H = \ln W$ ）。统计力学和信息论在最深的层面上是同一种数学——只是物理学家称之为“熵”而信息论学家称之为“信息”。

8.2 热力学第零定律

热力学第零定律

$T_A = T_B, T_B = T_C \implies T_A = T_C$ （温度传递性） **前提：** R6 ($S = k_B \ln W, \Delta S \geq 0$)

推导

Step 1 — 两系统热接触达到平衡时熵最大化： $dS_{\text{total}} = dS_A + dS_B = (1/T_A)dE_A + (1/T_B)dE_B = 0$ (R6: $dS = dE/T$)

Step 2 — 能量守恒 $dE_A + dE_B = 0$: $(1/T_A - 1/T_B)dE_A = 0 \implies T_A = T_B$ [N] 孤立系统 ($dE_{\text{total}} = 0$)

Step 3 — 传递性: $T_A = T_B$ 且 $T_B = T_C \implies T_A = T_C$ （等式传递性）

关键洞察：第零定律之所以叫“第零”是因为它是在第一、二、三定律之后才被认识到是更基础的。它定义了“温度”这个概念——温度是决定两个系统是否会在热接触时达到平衡的状态函数。 $1/T = \partial S / \partial E$ 不是随意定义的——它保证了两系统达到热平衡时温度相等。

宏观熵与微观状态数

- **1 mol 理想气体在 STP:** $N = 6.022 \times 10^{23}$ 个分子。微观状态数 $W \sim 10^{10^{24}}$ 。 $S = k_B \ln W \sim Nk_B \sim 8.3 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
- 用 Stirling 近似 $\ln(N!) \approx N \ln N - N$ 来处理 $N!$ ——对于 10^{23} 这个数，Stirling 公式的误差是 10^{-23} 级别！
- **热库：**能量相对涨落 $\Delta E/E \sim 1/\sqrt{N} \sim 10^{-11}$ ——宏观热力学量几乎无涨落
- **纳米尺度：**对 $N = 100$ 个分子，涨落 $\sim 10\%$ 。纳米系统的热力学需用涨落定理补充

精度等级

热力学第零定律：**[定性]**——它定义了一个概念（温度），而非做定量预言。

统计力学中：“热接触的两系统最大化总熵 $\implies$ 温度相等”是精确的数学推论。

8.3 热力学第一定律

热力学第一定律

$$dU = T dS - P dV + \mu dN \quad \text{前提：能量守恒 (Noether), R6}$$

变量：内能 U [$\text{M}\cdot\text{L}^2\cdot\text{T}^{-2}$] (状态函数)，压强 P [$\text{M}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{T}^{-2}$]，热 Q [$\text{M}\cdot\text{L}^2\cdot\text{T}^{-2}$] (过程量)，功 W [$\text{M}\cdot\text{L}^2\cdot\text{T}^{-2}$] (过程量)。

推导

Step 1 — 能量守恒： $dU = \delta Q - \delta W$ (dU 全微分； $\delta Q, \delta W$ 非全微分)

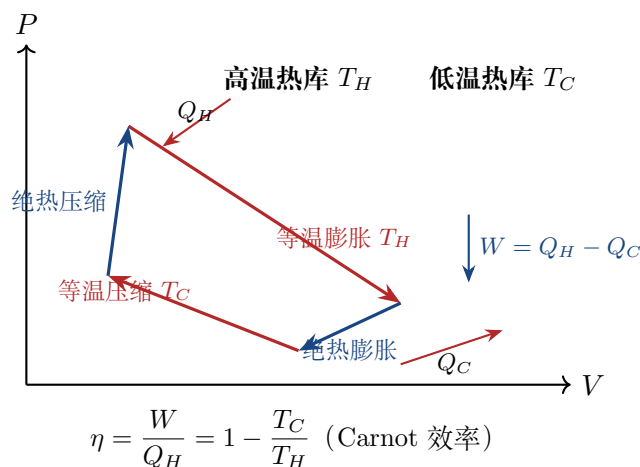
Step 2 — 可逆过程 $\delta Q_{\text{rev}} = T dS$ [N] 可逆过程 (R6: $dS = \delta Q_{\text{rev}}/T$)

Step 3 — 简单流体 $\delta W = P dV$

Step 4 — 推广到可变粒子数： $dU = T dS - P dV + \mu dN$

关键洞察：热力学第一定律 $dU = TdS - PdV + \mu dN$ 中的每一项对应一种“做功”方式： TdS = 热（熵的流动）， $-PdV$ = 机械功（体积变化）， μdN = 化学功（粒子数变化）。这三项恰好是热力学中能量的三种传递方式。

8.3.1 热机与 Carnot 循环



数学→物理桥梁： $dU = \delta Q - \delta W$ (经验能量守恒)

+ R6: $\delta Q_{\text{rev}} = T dS, \delta W = P dV$

$$= dU = T dS - P dV + \mu dN$$

物理→数学桥梁：Noether (能量守恒) + R6 (熵的统计定义) → 热力学第一定律
这个方程统一了能量、热、功、化学势——是热力学的“Euler-Lagrange方程”

8.4 热力学第三定律

热力学第三定律

$S \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$ (完美晶体, 非简并基态) **前提:** R6, 量子离散能谱 ($\leftarrow$ Schrödinger 方程)

变量: 基态简并度 g_0 [1] (能量最低能级的独立量子态数目)。

推导

Step 1 — $S = k_B \ln W$ (R6)

Step 2 — $T \rightarrow 0$: 系统进入量子基态。离散能谱由 Schrödinger 方程给出 ($\leftarrow$ R4b+R4c)
[N] 量子力学 (离散能谱) —— 经典系统 $S \rightarrow -\infty$ (Gibbs 悖论)

Step 3 — 若基态非简并 ($g_0 = 1$): $W = 1 \implies S = k_B \ln 1 = 0$ 若基态 g_0 重简并: $S \rightarrow k_B \ln g_0 > 0$ (剩余熵, 如水冰 Ih)

8.5 理想气体状态方程

理想气体状态方程

$PV = nRT$ ($R = N_A k_B = 8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) **前提:** R6, 热力学第一定律

推导

Step 1 — 自由粒子在体积 V 中: $W \propto V^N$ (经典稀薄气体, 无相互作用)

Step 2 — $S = k_B \ln W = Nk_B \ln V + C(E, N)$

Step 3 — 从热力学基本方程求压强: $P = T(\partial S / \partial V)_{E, N} = T \cdot (Nk_B / V)$

Step 4 — $PV = Nk_B T = nRT$ [N] R1 ($D = 3 \implies V \propto L^3$)

理想气体的实际表现

- $R = N_A k_B = 8.314462618 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ——这是 SI 2019 精确值
- 标准状态下 ($T = 273.15 \text{ K}$, $P = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$): 1 mol 理想气体体积 $V = RT/P = 22.414 \text{ L}$
- **偏离理想性:** van der Waals 方程 $(P + an^2/V^2)(V - nb) = nRT$ 。对 N_2 ($a = 0.137 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$, $b = 3.87 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$) , 在 STP 下偏差 $< 0.1\%$
- **极端条件:** 在高压 ($P > 100 \text{ atm}$) 或低温 (接近液化点), 理想气体定律完全失效——此时分子间力和分子体积不可忽略

精度等级

理想气体定律：**[近似]**——它是稀薄气体极限 ($n \rightarrow 0$) 的渐近行为。

在 $n \rightarrow 0$ 极限中精确成立；超出此极限需 van der Waals 或更精确的状态方程。

对于实际气体， PV/nRT 在 STP 下通常偏差 $< 0.1\%$ (除了近液化点的气体)。

8.6 Fermi-Dirac 分布 (推论)**Fermi-Dirac 分布 — corollary**

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) + 1} \quad \text{前提: Pauli 不相容 } (n_i \in \{0, 1\}), \text{ R6}$$

推导

Step 1 — Fermi 子约束: $n_i \in \{0, 1\}$ (Pauli 不相容原理)

Step 2 — 最大化熵 $S = -k_B \sum_i [n_i \ln n_i + (1 - n_i) \ln(1 - n_i)]$

约束 $\sum n_i = N, \sum n_i E_i = E$

Step 3 — Lagrange 乘子法: $\partial/\partial n_i[\dots] = 0 \implies \ln \frac{1-n_i}{n_i} = \alpha + \beta E_i$

Step 4 — $\alpha = -\beta\mu, \beta = 1/(k_B T): n_i = \frac{1}{\exp((E_i - \mu)/k_B T) + 1}$

8.7 Bose-Einstein 分布 (推论)**Bose-Einstein 分布 — corollary**

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) - 1} \quad \text{前提: 叠加原理 } (n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}), \text{ R6}$$

推导

Step 1 — Bose 子约束: $n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (无上限——R4a 叠加原理)

Step 2 — 最大化熵 $S = k_B \sum_i [(1 + n_i) \ln(1 + n_i) - n_i \ln n_i]$

Step 3 — Lagrange 乘子法 $\implies n_i = \frac{1}{\exp((E_i - \mu)/k_B T) - 1}$

分母中的 -1 (vs FD 的 $+1$) $\implies$ 当 $\mu \rightarrow 0$ 时 f 发散 $\implies$ Bose-Einstein 凝聚

关键洞察: FD 和 BE 分布分母中的 ± 1 是关键区别。 $+1$ (FD) 意味着 $f(E) \leq 1$ ——每个量子态最多一个粒子 (Pauli)。 -1 (BE) 意味着 $f(E)$ 可以任意大——多个 Bose 子可以占据同一量子态。这 ± 1 决定了白矮星和中子星的结构、金属的电导率、激光的工作原理、和 Bose-Einstein 凝聚的可能性。

量子统计的临界温度

- **Fermi 温度** (Cu 中电子) : $T_F = E_F/k_B \approx 8 \times 10^4$ K——室温下 ($T = 300$ K) , $T/T_F \approx 0.004$, 电子几乎完全简并。FD 分布 $\approx$ 阶跃函数 + 尾部热激发
- **Bose-Einstein 凝聚** (^{87}Rb 原子) : $T_c \approx 3.1 \frac{h^2 n^{2/3}}{(mk_B)} \sim 100$ nK——需要激光冷却到绝对零度以上一亿分之一度
- **超流 He-4**: $T_\lambda = 2.17$ K (1 atm) 。He-4 原子是 Bose 子——超流性是 BEC 的强相互作用版本
- **宇宙微波背景**: $T_{\text{CMB}} = 2.725$ K。光子是 Bose 子, 服从 Planck 分布 ($E = h\nu$, $\mu = 0$) ——这是宇宙中最完美的黑体辐射谱 (偏差 $< 10^{-5}$)

FD/BE 分布精度

Fermi-Dirac 分布: **[精确]** (S 最大化 + Pauli 约束的精确解)

Bose-Einstein 分布: **[精确]** 对无相互作用 Bose 子; **[有效]** 对弱相互作用 Bose 子 (如液 He-4)

Maxwell-Boltzmann 分布 (经典极限): **[近似]**——适用于 $n\lambda_{\text{dB}}^3 \ll 1$ (稀薄气体, 量子效应可忽略)

8.8 Nernst 不可达性原理：第三定律的强形式

热力学第三定律有两种强度不同的表述。**弱形式** (已在第 §8.4 节推导) : $S \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$ (完美晶体, 非简并基态)。本节推导 **强形式**——Nernst (1906) 的原始表述: ”不可能通过有限步骤达到绝对零度”。

Nernst 不可达性原理 — corollary

不可能通过任何有限序列的热力学操作达到 $T = 0$ 。↔ 交叉印证: 自旋-统计定理 (第 7 章) 决定实际基态简并度。 **前提**: 第三定律弱形式, R6

物理直觉: 想象你在给一个系统降温。在室温下, 一步等温压缩可以移除大量熵。但随着温度降低, $C(T) \rightarrow 0$ (Debye 模型 $C \propto T^3$; 电子 $C \propto T$) , 每一步能移除的熵越来越少。接近 $T = 0$ 时, 每一步几乎无能为力——你需要无限多步。就像 Zeno 悖论中的阿基里斯: 每一步都让你更接近目标, 但永远无法到达。

推导

Step 1 — 弱形式前提: $S \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$ (非简并基态 $g_0 = 1$) [N] 离散量子能谱 (来自 Schrödinger 方程 + R4)

Step 2 — 可逆过程的熵变: $dS = \delta Q_{\text{rev}}/T = C(T) dT/T$ 。 $C(T) \equiv \delta Q_{\text{rev}}/dT$ 为热容。

Step 3 — 低温热容行为: $C(T) \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$ ($C_{\text{ph}} \propto T^3$ 声子, $C_{\text{el}} = \gamma T$ 电子) 。 [N] 量子效应——无量子力学则经典 Dulong-Petit $C = 3R$ 在 $T \rightarrow 0$ 时不消失。

Step 4 — 从 T_i 到 T_f 的总熵变： $\Delta S(T_i \rightarrow T_f) = \int_{T_i}^{T_f} C(T)/T dT$ 。因 $C(T) \sim T^n$ ($n \geq 1$)，积分收敛， ΔS 为有限值。

Step 5 — 每步仅能移除有限熵： $|\Delta S_{\text{step}}| \leq \Delta S_{\text{max}}(T) < \infty$ 。在温度 T 时，最大等温熵变 $\leq C(T)$ 。随着 $T \rightarrow 0$ ， $C(T) \rightarrow 0$ ，每一步的操作“效能”趋于零。

Step 6 — 步数发散：要逼近 T_f ，所需步数 $N \propto [S(T_i) - S(T_f)]/|\Delta S_{\text{step}}(T_f)| \rightarrow \infty$ 当 $T_f \rightarrow 0$ 。

结论： $T = 0$ 在有限步内不可达。这比弱形式 ($S \rightarrow 0$) 更强——即使 $S \rightarrow 0$ 成立，达到 $T = 0$ 仍是不可能的。

$\boxed{[N]}$ 第三定律弱形式。 $\boxed{[N]}$ $C(T) \rightarrow 0$ 的量子低温标度律。 $\boxed{[S]}$ 弱形式 + 有限步约束 $\Rightarrow T = 0$ 不可达。

reversible: false—— $T = 0$ 不可达 $\nRightarrow S \rightarrow 0$ (可能存在 $S \rightarrow 0$ 但 $T = 0$ 可达的世界——尽管未发现)。

边界：黑洞中的 Nernst 定理

在黑洞热力学中，Bekenstein-Hawking 温度 $T_{\text{BH}} = \hbar c^3 / (8\pi G M k_B) > 0$ 。黑洞的 Hawking 辐射使其蒸发（质量减小），温度反而升高——无法通过任何过程达到 $T = 0$ 。Nernst 定理在引力系统中维持其强形式，但弱形式 ($S \rightarrow 0$) 被黑洞熵 $S_{\text{BH}} = k_B c^3 A / (4G \hbar)$ 颠覆—— S_{BH} 正比于视界面积而非体积。

反事实分析

若无 S

- 热力学退化为纯现象学——温度、熵只是操作定义，无法与微观物理联系
- 量子统计分布 (FD, BE) 无法推导——只能作为经验拟合
- Planck 黑体辐射公式仍然正确（光子服从 BE 统计），但其微观根源不可知
- k_B 没有物理意义——它不是“能量-温度转换标度”，只是一个经验常数

若无等概率先验（不同微观态有不同的先验概率）

- 平衡态分布不再是 Boltzmann 分布 $P_i \propto e^{-E_i/k_B T}$ ——取决于未知的“先验偏好”
- 热力学第二定律不一定成立——系统可能偏好低熵态
- 遍历假说的核心就是“等概率”——没有它，统计力学只剩下组合数学

8.9 涨落定理：有限系统的熵增修正

热力学第二定律 $\Delta S \geq 0$ 是 $N \rightarrow \infty$ 极限下的严格结果。对于有限系统 ($N \sim 10^2-10^3$)，熵减少的涨落不再可以忽略。**涨落定理** (fluctuation theorems) 给出了有限系统中熵增的精确修正。

8.9.1 Jarzynski 等式

定理 (Jarzynski 1997) : [S] 对任意非平衡过程, 自由能差 ΔF 与外界做功 W 的关系为:

$$\langle e^{-W/k_B T} \rangle = e^{-\Delta F/k_B T} \quad (8.1)$$

其中平均是对所有可能的非平衡路径取的。

关键洞察: Jarzynski 等式的强大之处: 它允许你从非平衡功的分布中提取平衡态的自由能差。这意味着第二定律 $\langle W \rangle \geq \Delta F$ 是 Jarzynski 等式 + Jensen 不等式的推论: $e^{-\langle W \rangle/k_B T} \leq \langle e^{-W/k_B T} \rangle = e^{-\Delta F/k_B T} \Rightarrow \langle W \rangle \geq \Delta F$ 。第二定律不是被推翻——而是在非平衡过程中被推广了。

8.9.2 Crooks 涨落定理

定理 (Crooks 1999) : [S] 正向过程做功 W 的概率 $P_F(W)$ 与逆向过程做功 $-W$ 的概率 $P_R(-W)$ 满足:

$$\frac{P_F(W)}{P_R(-W)} = e^{(W-\Delta F)/k_B T} \quad (8.2)$$

物理含义: 违反第二定律的路径 ($W < \Delta F$) 的概率以指数被压低——但对于小系统, 这个概率是可观测的。单分子拉伸实验 (RNA 发夹结构、光镊) 已经直接验证了 Crooks 涨落定理。

数学→物理桥梁: Jarzynski: $\langle e^{-W/k_B T} \rangle = e^{-\Delta F/k_B T}$

Crooks: $P_F(W)/P_R(-W) = e^{(W-\Delta F)/k_B T}$

物理→数学桥梁: 非平衡功的分布 $\leftarrow$ 平衡自由能差

第二定律是这些等式在 $N \rightarrow \infty$ 时的极限——有限系统的熵可以暂时减少, 但减少的概率被指数压低

8.9.3 涨落耗散定理

涨落耗散定理 (Fluctuation-Dissipation Theorem) 是统计力学第二重要的定理 (仅次于 $S = k_B \ln W$)。它说: 系统的**涨落** (热噪声) 和**耗散** (摩擦/电阻) 由同一物理机制控制——两者都来自系统与热库的耦合。

经典形式: [S] 布朗运动粒子的扩散系数 D 和摩擦系数 γ 的关系:

$$D = \frac{k_B T}{\gamma} \quad (8.3)$$

这就是 Einstein 1905 年的关系——他由此独立测定了 Boltzmann 常数和 Avogadro 数。

量子形式: Nyquist 定理 (1928) ——电阻器中的 Johnson 热噪声电压 $\langle V^2 \rangle = 4k_B T R \Delta f$ 。量子推广在 $k_B T \ll \hbar \omega$ 时修正为 $\langle V^2 \rangle = 4R \Delta f (\hbar \omega / 2) \coth(\hbar \omega / 2k_B T)$ ——包含了零点涨落。

涨落在日常生活中的数量级

- **Johnson 噪声:** 室温下 $1\text{k}\Omega$ 电阻在 1 MHz 带宽中的热噪声电压 $\sim 4\text{ }\mu\text{V}$ ——在你的收音机里产生可听的“嘶嘶”声
- **细胞内的布朗运动:** 直径 $1\text{ }\mu\text{m}$ 的粒子在水中每秒因热涨落位移 $\sim 0.5\text{ }\mu\text{m}$ ——这正是

细胞内物质运输的”被动扩散”机制

- **涨落定理验证**：单分子拉伸实验（RNA 发夹）——做功 $W \sim 100 k_B T$ 的分布直接测量，与 Crooks 定理的预言吻合至 $\sim 5\%$

8.10 非平衡统计力学：从平衡到非平衡的桥梁

R6 主要处理平衡态系统。但真实世界中的大多数系统都远离平衡。非平衡统计力学是当前物理学最活跃的领域之一：

- **线性响应理论**（Kubo 公式）：当系统仅弱偏离平衡时（线性区），系统对外界扰动的响应由平衡态的涨落完全决定。这是涨落耗散定理的推广
- **Onsager 倒易关系**：线性输运系数矩阵是对称的——热流量对化学势梯度的响应 = 粒子流对温度梯度的响应。这是微观可逆性的宏观表达
- **非平衡稳态**：系统在外界驱动下可维持在非平衡稳态——此时有恒定的熵产生率 $\dot{S} > 0$ 。Prigogine 的最小熵产生原理对近平衡稳态适用

关键洞察：平衡态统计力学是 R6 的核心贡献——它从 $S = k_B \ln W$ 推导出全部热力学定律。非平衡统计力学是 R6 的当代前沿——涨落定理、线性响应、非平衡稳态。两者都是 R6 的推论，但后者仍在活跃发展。

习题

1. **[简单]** 用 $S = k_B \ln W$ 和等概率假设，推导两系统热接触后的热平衡条件 $T_A = T_B$ 。哪一步需要 $N \rightarrow \infty$ 极限？
2. **[简单]** 用 Stirling 公式 $\ln N! \approx N \ln N - N$ ，从 $S = k_B \ln W$ 推导理想气体的 Sackur-Tetrode 方程 $S = Nk_B [\ln(V/N\lambda^3) + 5/2]$ 。
3. **[中等]** 证明：Jarzynski 等式 $\langle e^{-W/k_B T} \rangle = e^{-\Delta F/k_B T}$ 蕴含 Jensen 不等式 $\langle W \rangle \geq \Delta F$ （即热力学第二定律的非平衡形式）。
4. **[中等]** 对无相互作用的量子气体，推导 Fermi-Dirac 和 Bose-Einstein 分布的配分函数。 μ 的符号在 FD 和 BE 中有何不同？
5. **[较难]** 从涨落耗散定理出发，推导一维布朗粒子的均方位移 $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ ，并验证 Einstein 关系 $D = k_B T / \gamma$ 。
6. **[挑战]** 证明 Nernst 不可达性原理（第三定律强形式）： $T = 0$ 不能在有限步骤内达到。提示：用 $S(T) = \int_0^T (C_V/T') dT'$ 和 Nernst 条件 $C_V(T) \rightarrow 0$ 当 $T \rightarrow 0$ 。

Chapter 9

相对论：从光速不变到引力

9.1 概述

R1（因果时空结构）的直接推论涵盖狭义相对论的运动学（Lorentz 变换、质能等价）和广义相对论（Einstein 场方程）。本章从 R1 的子组件出发，严格推导这些结果。

依赖的 T+EP 组件		
R1 因果结构(1a+1b)	R1 等效原理(1c)	R2 最小作用量

从光速不变到时空弯曲——R1的两条腿

R1 包含两个独立但互补的原则：

- 因果结构**（1a+1b）：光速在任何惯性系中相同，且是因果传播的速度上限。这直接导出 Lorentz 变换、时间膨胀、长度收缩、同时性的相对性——以及 $E = mc^2$ 。
- 等效原理**（1c）：引力质量 = 惯性质量。这意味着引力不是”力”，而是时空弯曲的几何表现。

前者是**运动学**（时空的背景结构）；后者是**动力学**（物质如何弯曲时空，时空中物质如何运动）。两者结合 + R2（最小作用量）→ Einstein 场方程 → 全部引力现象。

9.2 科普层：从直觉到相对论

相对论可能是物理学中最被误解的理论。”一切都是相对的”——这是对相对论最大的误解。Einstein 本人曾说他更愿意称之为”不变论”（Invariantentheorie），因为理论的核心不是”一切都是相对的”，而是**某些东西在所有参考系中都是绝对不变的**：光速、时空间隔、物理定律的形式。

9.2.1 一个思想实验：火车、闪电和同时性

想象你站在站台上。一列火车以速度 v 通过。恰好在你面前，两道闪电同时击中火车的车头和车尾。你看到的是：两道闪电**同时**发生。

但火车正中间的一名乘客看到什么？车尾的闪光向他运动，车头的闪光远离他运动。因为光速在**所有**参考系中相同（这是 R1 的核心），车尾的闪光先到达乘客——在他看来，车尾的闪电**先**发生。

谁的”同时”是对的？**都是**。不存在一个”上帝视角”的钟表来裁定”真正的”同时性。同时性是相对的——这正是 Lorentz 变换的物理本质。这个看似简单的思想实验是爱因斯坦 1905 年狭义相对论的逻辑起点。

9.2.2 GPS：相对论不是学术游戏——它每天拯救你的手机

你的手机 GPS 能告诉你位置，精度在几米之内。但 GPS 卫星在 20,200 km 高的轨道上以 3.9 km/s 的速度飞行。相对论告诉我们，这些卫星的钟相对于地面的钟有时间偏差——原因有二：

1. **狭义相对论——速度使钟变慢**：卫星高速运动 $\rightarrow$ 钟每天慢 $7\ \mu\text{s}$
2. **广义相对论——引力使钟变快**：卫星在弱引力场中 $\rightarrow$ 钟每天快 $45\ \mu\text{s}$

净效应：时钟每天快 $38\ \mu\text{s}$ 。 38 微秒听起来很少——但光在这段时间里走了 $c \times 38\ \mu\text{s} \approx 11.4\ \text{km}$ 。如果 GPS 不修正相对论效应，你的定位误差每天累积 $\sim 11\ \text{km}$ ——在一天之内，GPS 会从”导航”变成”误导”。

相对论不仅是物理学家在黑板上的游戏——它被编码在每一部智能手机的 GPS 芯片里。

9.2.3 双生子悖论：为什么旅行者更年轻

双生子悖论是最著名的相对论”悖论”之一。一个双胞胎留在地球上，另一个以接近光速去太空旅行。当旅行者返回时，她比她留在地球的双胞胎姐妹年轻。但这不是悖论——在狭义相对论框架下，这个结果完全自洽。

关键是：**两个参考系不对称**。旅行者经历了加速度（离开地球、掉头、返回），而留在地球的双胞胎始终在惯性系中。狭义相对论的时间膨胀公式适用于惯性系——加速度打破了对称性。在旅行者的非惯性系中计算，同样得出她更年轻的结论。两者的计算一致——没有悖论。

实验验证：Hafele-Keating 实验（1971）用商用客机携带原子钟环球飞行。飞行方向的钟比地面钟慢（东向 $-59 \pm 10\ \text{ns}$ ）或快（西向 $+273 \pm 7\ \text{ns}$ ）——精确符合狭义和广义相对论的联合预言。2010 年，Chou 等人用光学原子钟在 0.33 m 的高度差上测量引力红移——GR 在厘米尺度上被验证。

9.3 Lorentz 变换

9.3.1 物理直觉：光速不变如何扭曲时空

想象你在以接近光速飞行的飞船里。根据 Newton 的直觉，你测到的光速应该等于 c 加上或减去飞船的速度。但实验（Michelson-Morley 1887）说：不对，你测到的光速永远是 c 。

这意味着什么？如果你向前方射出一束光，光以 c 离你而去；地面上的观测者也看到那束光以 c 前进——但你的飞船在动！唯一的解释是：**你的时间流逝得比地面上的人慢**（时间膨胀），**你的飞船在运动方向上被压缩了**（长度收缩）。Lorentz 变换正是这两者效应的精确数学表达。

关键洞察：若光速在所有参考系中相同，则时间和空间不再是独立不相关的。它们混合在一起——时空是一个统一的四维实体。Lorentz 变换是“时空旋转”的数学表达——就像三维旋转保持长度不变一样，Lorentz 变换保持时空间隔不变。

9.4 Lorentz 变换

Lorentz 变换

$t' = \gamma(t - vx/c^2)$, $x' = \gamma(x - vt)$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ **前提：** c 不变 (R1), Lorentz 不变性 (R1)

变量： $\gamma \geq 1$ [1] (Lorentz 因子), v [L·T⁻¹] (相对速度, $|v| < c$)。

推导

Step 1 — 基本假设: $c' = c$ (R1: kernel.light_speed_invariance)

Step 2 — 间隔不变性: $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ (R1: kernel.lorentz_invariance)

Step 3 — 线性变换: $x' = Ax + Bt$, $t' = Cx + Dt$ [N] 时空均匀 $\rightarrow$ 线性 (无 x^2 项)

Step 4 — 标准构型 (S' 以速度 v 相对 S 沿 x 轴运动)

Step 5 — 代入间隔不变性, 对照 t^2, x^2, xt 系数:

$$t^2 : c^2 D^2 - A^2 v^2 = c^2$$

$$x^2 : c^2 C^2 - A^2 = -1$$

$$xt : 2c^2 CD + 2A^2 v = 0$$

$$\implies D = \gamma, A = \gamma, C = -\gamma v/c^2, B = -\gamma v$$

Step 6 — $x' = \gamma(x - vt)$, $t' = \gamma(t - vx/c^2)$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

reversible: true, [N] $|v| < c$ ($v = c$ 时 γ 发散, $v > c$ 时 γ 虚数——不物理)。

Lorentz 因子的实际大小

- **步行** ($v = 1.4$ m/s) : $\gamma - 1 \approx v^2/(2c^2) \approx 1.1 \times 10^{-17}$ ——时间膨胀效应仅为 10^{-17}
- **客机** ($v = 250$ m/s, ≈ 900 km/h) : $\gamma - 1 \approx 3.5 \times 10^{-13}$ ——从北京飞纽约 (13 小时), 时间差 ~ 16 ns
- **GPS 卫星** ($v = 3.9$ km/s) : $\gamma - 1 \approx 8.4 \times 10^{-11}$ ——每天相对论时间修正 $\sim 7 \mu\text{s}$ (加上 GR 效应后, 总计 $\sim 38 \mu\text{s}/\text{天}$, 若不修正, GPS 定位误差每天累积 ~ 11 km!)
- **电子** ($v = 0.99c$) : $\gamma \approx 7.1$ ——寿命延长 7 倍
- **LHC 质子** ($E = 7$ TeV, $m_p = 0.938$ GeV) : $\gamma = E/m_p c^2 \approx 7460$ ——每个质子每秒绕 LHC 11245 圈

经验规则：当 $v < 0.1c$ 时, $\gamma - 1 < 0.5\%$ ——日常生活中相对论效应完全可以忽略。但 **GPS** 的 $38 \mu\text{s}/\text{天}$ 不是可忽略的——因为 $38 \mu\text{s} \times c \approx 11.4$ km。

9.5 质能等价

质能等价

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4; \text{ 静止系: } E = mc^2 \quad \text{前提: Lorentz 不变性 (R1)}$$

变量：四维动量 $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ [M·L·T⁻¹], 静止质量 m [M] (Lorentz 标量——与参考系无关的不变质量), 固有时 τ [T] ($d\tau^2 = ds^2/c^2$)。

推导

Step 1 — 四维动量: $p^\mu \equiv m dx^\mu/d\tau = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p})$ (m 是 Lorentz 标量——粒子的内禀质量不随参考系改变)

Step 2 — 时间分量: $E = \gamma mc^2$

Step 3 — Lorentz 不变量 (R1): $p_\mu p^\mu = (E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$

Step 4 — $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ 。静止系 ($\mathbf{p} = 0$): $E_{\text{rest}} = mc^2$

关键洞察： $E = mc^2$ 不是“质量可以转化为能量”——质量就是能量的一种形式。静止的物体有 mc^2 的能量。化学反应中，化学键重组释放的能量来自质量亏损——氢燃烧成水，1 kg 氢的质量亏损 $\sim 10^{-10}$ kg。核反应中，²³⁵U 裂变的质量亏损 $\sim 0.1\%$ 。在粒子物理中，正负电子对湮灭的质量亏损是 100%——全部质量转化为光子能量。

E

- **化学燃烧** ($H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O$) : 释放 286 kJ/mol。质量亏损 $\Delta m = \Delta E/c^2 \approx 3.2 \times 10^{-12}$ kg/mol—— $\Delta m/m \sim 10^{-10}$
- **核裂变** (²³⁵U) : 释放 ~ 200 MeV/核。 $\Delta m/m \sim 0.09\%$ ——化学能的百万倍
- **核聚变** (DT 反应) : 释放 17.6 MeV/反应。 $\Delta m/m \sim 0.4\%$
- **正负电子湮灭**: $\Delta m/m = 100\%$ ——全部静能转化为光子
- **太阳**: 每秒将 4.26×10^9 kg 质量转化为能量 (太阳总质量 2×10^{30} kg——还能燃烧 $\sim 10^{10}$ 年)

精度等级

质能等价: **[精确]** (Lorentz 不变性的数学推论)。

实验验证: $E = \gamma mc^2$ 在粒子加速器中以 $> 10^{-5}$ 精度成立 (限于 m 的精度)。

9.6 Einstein 场方程

Einstein 场方程

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \text{前提: 等效原理, 广义协变性 (R1), 最小作用量 (R2)}$$

变量: Einstein 张量 $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ [L^{-2}], Ricci 张量 $R_{\mu\nu}$ [L^{-2}], 应力-能量张量 $T_{\mu\nu}$ [$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$], 度规行列式 $g = \det(g_{\mu\nu}) < 0$ [1]。

推导: Lovelock 唯一性 + Einstein-Hilbert 变分

Step 1 — Lovelock 定理 (1971): D 维时空中, 由度规及其导数构成、产生至多二阶运动方程的最一般 Lagrange 密度是 **Lovelock Lagrangian**:

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = \sum_{k=0}^{\lfloor D/2 \rfloor} c_k \mathcal{L}_k \quad (9.1)$$

其中 $\mathcal{L}_k$ 为 k 阶 Euler 密度: $\mathcal{L}_0 = 1$ (Λ), $\mathcal{L}_1 = R$ (Einstein-Hilbert), $\mathcal{L}_2 = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ (Gauss-Bonnet)。

Step 2 — 维度截断: $D = 4$ 时 $\lfloor D/2 \rfloor = 2$ 。但 $\mathcal{L}_2$ (Gauss-Bonnet) 在 4D 中为**拓扑不变量** (Chern-Gauss-Bonnet 定理), 其变分恒为零, 不贡献运动方程。更高阶项 $\mathcal{L}_{k \geq 3}$ 在 4D 中恒为零 (微分形式阶数超过流形维数)。

Step 3 — 为什么 R^2 项不合法: R^2 、 $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 等不是 Euler 密度——它们的变分产生 $\square R$ 等四阶导数 $\Rightarrow$ **Ostrogradsky 鬼场** (理论不稳定, 量子化后不么正)。 $\boxed{[N]}$ 二阶场方程约束排除了这些项。

Step 4 — 4D 中唯一的合法纯度规引力 Lagrangian:

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = c_0 + c_1 R = -2\Lambda + \frac{R}{2\kappa} \quad (9.2)$$

此即 Einstein-Hilbert 作用量——在 4D 中, 它**不是众多选择之一, 而是唯一的选择**。 $\leftrightarrow$ 交叉印证: 自旋-统计定理同样依赖 $D = 4$ ——量子统计和经典引力从两侧独立推出维度的特殊地位。

Step 5 — Einstein-Hilbert 作用量: $S = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x + S_{\text{matter}}$

Step 6 — 对 $g^{\mu\nu}$ 变分 (R2: $\delta S = 0$)

Step 7 — 引力部分变分: $\delta(\int R \sqrt{-g} d^4x) = \int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$ (Palatini 恒等式 + $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$)

Step 8 — 定义 $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ 。 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0$ (Bianchi)

Step 9 — 物质部分: $T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}$

Step 10 — 场方程: $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ 。Newton 极限 (弱场低速) 固定 $\kappa = 8\pi G/c^4$

必要条件: R1 (等效原理 [N] + 广义协变性 [N]), R2 ($\delta S = 0$ [N]), 4 维时空 [N] (Lovelock 定理的核心——仅 $D = 4$ 时唯一候选为 $\Lambda + R$), 二阶场方程约束 [N] (排除 R^2 等阶鬼场项)。

充分条件: T+EP+4D+二阶方程约束 $\Rightarrow$ Einstein 场方程 (Lovelock 定理保证唯一性)。reversible: true

关键洞察：Lovelock 定理 (1971) 是 GR 的”唯一性证明”。在 4D 时空中，如果你要求引力由度规张量描述且场方程最多二阶导数，Einstein-Hilbert 作用量是**唯一**的选择。这意味着：Einstein 不是”猜中”了正确方程——在给定合理假设下，没有其他数学上可能的方程。GR 不是众多引力理论之一——它是在给定约束下唯一自洽的理论。

GR 效应的量级与 GR 的必要性

- **太阳表面：** $|\phi|/c^2 = GM_{\odot}/(R_{\odot}c^2) \approx 2.1 \times 10^{-6}$ 。光线偏折 (Eddington 1919)： $\Delta\theta = 4GM/(Rc^2) \approx 1.75''$ ——首次 GR 验证
- **水星近日点进动：**GR 修正 $43''/\text{世纪}$ ——Newton 预言值 $5557''/\text{世纪}$ ，观测值 $5600''/\text{世纪}$ 。差值 $43''$ 恰好由 GR 解释
- **地球表面：** $|\phi|/c^2 \approx 7 \times 10^{-10}$ 。GPS 卫星 ($h = 20200 \text{ km}$) 的 GR 时间修正：引力红移 $\sim +45 \mu\text{s}/\text{天}$ (钟在弱引力场中走得快) + 运动时间膨胀 $\sim -7 \mu\text{s}/\text{天}$ = 净效应 $\sim +38 \mu\text{s}/\text{天}$
- **自引力系统临界值：** $GM/(Rc^2) \sim 1$ 意味着 GR 效应不可忽略——中子星 ($GM/Rc^2 \sim 0.1-0.3$) 和黑洞 ($GM/Rc^2 = 0.5$ 在视界处) 必须用 GR
- **宇宙学：** $\Lambda \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ ——宇宙学常数极其微小但非零 (暗能量)。为什么 Λ 不是 Planck 尺度的 10^{69} m^{-2} ? 这是”宇宙学常数问题”——物理学最大的未解之谜之一

GR 精度等级

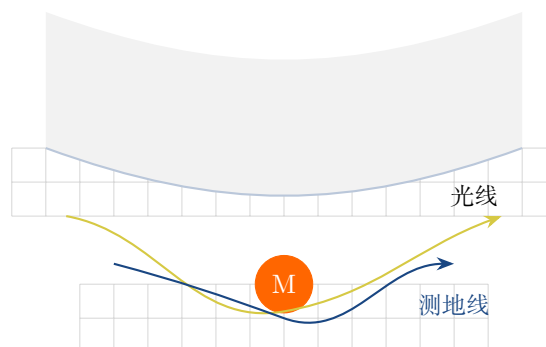
Einstein 场方程：**[有效]**——在 $E \ll E_P \approx 10^{19} \text{ GeV}$ 时精确成立。

Lovelock 唯一性：**[精确]** (在 4D 中，至多二阶场方程 + 度规描述 $\Rightarrow$ 唯一候选为 Einstein 张量)。

宇宙学常数 Λ ：**[偶然]**——其数值不由 T+EP 决定。

Planck 尺度修正：预期存在 R^2 等高阶项，但被 $\sim (E/E_P)^2$ 压低。

9.6.1 引力 = 时空弯曲：从力到几何



物质告诉时空如何弯曲，时空告诉物质如何运动 (Wheeler)

Newton: $m\mathbf{a} = -GMm\mathbf{r}/r^2$ (力) Einstein:

$\delta \int ds = 0$ (弯曲时空中的”直线” = 测地线)

9.6.2 Schwarzschild 解——从场方程到天体的时空

Einstein 场方程是一个高度非线性的二阶偏微分方程组——一般来说极难解。但在**真空球对称** ($T_{\mu\nu} = 0$, 且所有物理量仅依赖于 r) 的情况下, Karl Schwarzschild 在 1916 年 (Einstein 发表场方程后仅几个月!) 找到了精确解:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (9.3)$$

其中 $r_s \equiv 2GM/c^2$ 是**Schwarzschild 半径**。这个度规描述的是任何球对称质量外部 ($r > R$) 的时空几何。几个关键极限:

- $r \gg r_s$: $g_{00} \approx 1 - r_s/r = 1 + 2\phi/c^2$ ($\phi = -GM/r$ 是 Newton 引力势)。**Newton 引力作为弱场极限自动涌现**
- $r = r_s$: $g_{00} = 0$, $g_{rr} \rightarrow \infty$ ——这是**事件视界**。视界处的奇异性是坐标奇点 (在 Kruskal 坐标中消除), 不是物理奇点
- $r < r_s$: g_{00} 和 g_{rr} 交换符号——时间坐标变为类空, 径向坐标变为类时。任何在视界内的粒子**必然**向 $r = 0$ 运动——这正是”黑洞”的本质

Schwarzschild 半径的量级: 太阳 $r_s \approx 3 \text{ km}$ (但太阳半径 $R_\odot \approx 7 \times 10^5 \text{ km}$, 远超视界)。地球 $r_s \approx 9 \text{ mm}$ 。一个 70 kg 的人 $r_s \approx 10^{-25} \text{ m}$ ——比 Planck 长度还小 10 个数量级。

9.6.3 引力波——时空的涟漪

Einstein 场方程的第二大预言 (在 Schwarzschild 解之后) 是引力波: 时空度规本身的波动, 以光速传播。在线性化近似 ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$) 下, Einstein 方程退化为的一组波动方程:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (9.4)$$

在真空中 ($T_{\mu\nu} = 0$), $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ——标准的波动方程, 波速为 c 。**引力波有两个独立的极化态** (h_+ 和 $h_\times$)——这与引力子自旋为 2 一致。D=4 时空允许两个引力波极化——若 $D \neq 4$, 极化数不同。这再次印证了 Lovelock 定理中维度的关键作用。

引力波——从 Hulse-Taylor 到 LIGO

- **Hulse-Taylor 双星 (PSR B1913+16, 1974)**: 两个中子星互绕, 轨道周期每年衰减 $\sim 76 \mu\text{s}$ ——恰好等于 GR 预言的引力辐射导致的能量损失。1993 年 Nobel 奖
- **LIGO GW150914 (2015)**: 两个黑洞 ($36 + 29M_\odot$) 合并为一个 $62M_\odot$ 黑洞—— $3M_\odot c^2 \approx 5 \times 10^{47} \text{ J}$ 的能量以引力波释放。在峰值时, 引力波功率超过了**可观测宇宙中所有恒星的总光度**
- **应变灵敏度**: LIGO 测量的是镜面间距离的相对变化 $\Delta L/L \sim 10^{-21}$ ——相当于测量地球到太阳距离 ($1.5 \times 10^{11} \text{ m}$) 上一个原子直径的变化
- **GW170817 (2017)**: 双中子星合并——引力波 + 伽马射线暴 + 光学对应体同时观测。引力波速度与光速差 $\Delta v/c < 10^{-15}$ ——200 年来对引力最精确的检验

- **Pulsar Timing Array (2023)** : NANOGrav 等通过毫秒脉冲星计时阵列探测到纳赫兹引力波背景——可能是超大质量黑洞双星合并的叠加信号

9.7 Newton 万有引力（弱场极限）

Newton 万有引力定律已在第 5 章作为 Einstein 场方程的弱场极限导出。这里仅强调其推导链：

$$\mathbf{R1} \text{ (等效原理 + 广义协变性)} + \mathbf{R2} \rightarrow \mathbf{Einstein 场方程} \xrightarrow{\text{弱场+低速}} \mathbf{Newton 万有引力}$$

reversible: false——Newton 理论是 GR 的低能有效理论，丢失了时空弯曲的全部信息。

反事实分析

若光速随参考系变化

Michelson-Morley 应有非零结果——零结果被 10^{-18} 精度验证。无 $E = mc^2$ ——核能不能存在。GPS 定位误差每天 $> 10 \text{ km}$ 。

若 $D \neq 4$ （不同时空维数）

$D = 5$: Gauss-Bonnet 项贡献运动方程。 $D = 3$: GR 无局域自由度（无引力波）。 $D = 2$: Einstein 张量恒为零。我们的 $D = 3 + 1$ 恰好支持 Einstein 引力 + 2 个引力波极化。

习题

1. [简单] 从 Lorentz 变换推导时间膨胀 $\Delta t' = \gamma \Delta t$ 。 $v = 0.99c$ 的 μ 子 ($\tau_0 = 2.2 \mu\text{s}$) 在实验室中能飞行多远？
2. [简单] 验证 $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$ 是 Lorentz 不变量。从四维动量守恒推导 Compton 散射公式。
3. [中等] 证明 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 恰好等于 Maxwell 预言的电磁波速。深层含义？
4. [中等] 从 Einstein 场方程 Newton 极限推导 $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ 。关键步骤：弱场展开 + 测地线方程 $\rightarrow h_{00} = 2\phi/c^2$ 。
5. [较难] 推导 Schwarzschild 外部解的 Ricci 张量。验证 $r \gg r_s$ 时 $g_{00} \approx 1 + 2\phi/c^2$ 。
6. [挑战] Lovelock 定理：4D 中唯一至多二阶场方程的度规 Lagrangian 是 $\mathcal{L} = a_0 + a_1 R$ 。解释 R^2 为何产生四阶导数（Ostrogradsky 不稳定性），Gauss-Bonnet 为何在 4D 中为拓扑不变。

Chapter 10

守恒律：Noether 的遗产

10.1 概述

Noether 定理（1918）是 R2 的最重要推论之一。它建立了一个深刻的**双向等价**关系：作用量的每个连续对称性对应一个守恒量，每个守恒量反过来揭示一个对称性。本章从 Noether 定理出发，推导能量、动量、角动量和电荷的守恒律。

依赖的 T+EP 组件		
R2 Noether 定理	R1 时间/空间/旋转对称	R3 U(1) 规范

对称性与守恒律：一个统一的视角

Symmetry $\leftrightarrow$ Conservation 是物理学的黄金法则。这不是经验规律——这是 Noether **定理**，一个纯粹的数学证明。其深刻含义在于：

- **时间平移不变** $\rightarrow$ 能量守恒：今天的物理定律和昨天一样
- **空间平移不变** $\rightarrow$ 动量守恒：这里的物理定律和北京一样
- **旋转不变** $\rightarrow$ 角动量守恒：面朝东和面朝北，物理定律不变
- **量子相位不变** ($U(1)$) $\rightarrow$ 电荷守恒：波函数的整体相位不可观测

如果你发现了一个守恒量，你可以反推它背后的对称性。如果你发现一个对称性，你可以预言它必然伴随的守恒量。这个双向等价性使得 Noether 定理成为物理学中最重要的结构定理之一。

10.2 变量定义

四大守恒律涉及的核心物理量：

变量	符号	类型	量纲	定义域	物理含义
能量	$E = H$	$\mathbb{R}$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	$E \geq E_0$ (基态能)	时间平移对称性的守恒荷
动量	$\mathbf{P}$	$\mathbb{R}^3$	$M \cdot L \cdot T^{-1}$	$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$	空间平移对称性的守恒荷
角动量	$\mathbf{L}$	$\mathbb{R}^3$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$	$\mathbf{L} \in \mathbb{R}^3$	旋转对称性的守恒荷
电荷	Q	$\mathbb{R}$	$T \cdot I$	$Q \in \mathbb{Z}e$ (量子化)	$U(1)$ 规范对称性的守恒荷
Lagrangian	$L(q, \dot{q})$	$\mathbb{R}$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	$L = T - V$	动力学系统的特征函数
Noether 流	J^μ	$\mathbb{R}^4$	依赖对称性	$\partial_\mu J^\mu = 0$	守恒量的四维流密度
Noether 荷	Q_N	$\mathbb{R}$	依赖对称性	$dQ_N/dt = 0$	$Q_N = \int J^0 d^3x$
应力-能量张量	$T^{\mu\nu}$	$\mathbb{R}^{4 \times 4}$ 对称	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$	能量-动量-应力的统一载体

Table 10.1: 守恒律核心变量定义

10.3 Noether 定理的数学提炼

第 7 章给出了 Noether 定理的完整证明。此处提炼其数学本质，作为四大守恒律推导的共同基础：

Noether 第一定理（力学形式）： [S] 若作用量 $S = \int L(q, \dot{q}) dt$ 在连续变换 $q_i \rightarrow q_i + \varepsilon Q_i(q, \dot{q})$ 下不变（ $\delta S = 0$ 对任何时间区间），则：

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i - F \right) = 0 \quad (10.1)$$

其中 F 满足 $L' = L + \varepsilon dF/dt$ 。括号中的量 $= dQ_N/dt = 0$ ——即 Noether 荷守恒。

场论形式： [S] $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ 在 $\phi \rightarrow \phi + \varepsilon \Delta \phi$ 下不变 $\Rightarrow$ ：

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{F}^\mu \quad (10.2)$$

关键洞察： Noether 定理的惊人之处在于它不需要知道运动方程的具体形式——它只需要对称性。不需要解运动方程就能知道什么量守恒。这是物理学中最接近“免费午餐”的东西。

10.4 科普层：守恒律——宇宙的“记账系统”

守恒律是物理学最接近“会计”的部分。它们不告诉你什么会发生——它们告诉你什么不能发生。能量不能无中生有。电荷不能凭空消失。就像银行不会允许钱凭空出现或消失——宇宙也有自己严格的“账本”。

但为什么宇宙有这些账本？Noether 在 1918 年给出了最优雅的答案：**每一个守恒律都是某种深层的、不可见的“不变性”的影子。**

10.4.1 滑冰者和我们的直觉

为什么花滑运动员抱紧手臂时转得更快？这不是你学到的第一条“物理定律”——而是你通过观看体育比赛直觉感知到的。答案就在角动量守恒：转动惯量减小（手臂靠近身体） $\rightarrow$ 角速度增大（转得更快） $\rightarrow$ 角动量不变。运动员利用的是旋转对称性——当外扭矩为零时，角动量不能变。

10.4.2 台球桌上的动量

白球撞黑球。碰撞前白球以速度 $\mathbf{v}$ 运动，黑球静止。碰撞后白球停下，黑球以速度 $\mathbf{v}$ 运动。总动量从白球完全转移到了黑球——但总量不变。这不是因为台球“有弹性”——即使在完全非弹性碰撞中（球粘在一起），总动量仍然守恒。动量守恒来自空间平移不变性——这里和那里的物理定律一样。如果动量不守恒，宇宙将没有“惯性”的概念。

10.4.3 膨胀宇宙的能量问题——Noether 定理的失败案例

这是 Noether 定理最精彩的“反面应用”。我们的宇宙在膨胀——度规 $g_{\mu\nu}$ 显含时间。因此，**不存在全局时间平移对称性**。Noether 定理说：没有对称性 $\rightarrow$ 没有守恒律。确实，在广义相对论中，**宇宙的总能量没有全局守恒的定义**。这听起来像物理学的丑闻——但恰恰相反：它完美地证明了 Noether 定理的正确性。对称性不存在 = 守恒律不存在。不多不少。

但为什么我们在太阳系中仍然观测到能量守恒？因为太阳系的尺度远小于宇宙学尺度。在太阳系内，度规的时间变化可以忽略——时间平移对称性在局域近似成立——So 能量在局域近似下守恒。这是物理学中一个更大的主题：**定律本身可以是 emergent——在适当的尺度上涌现**。

10.5 能量守恒

能量守恒

$dE/dt = 0$ （孤立系统）；局部： $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ **前提**：Noether 定理（时间平移对称性）

推导：时间平移对称性到能量守恒

Step 1 — 时间平移： $t \rightarrow t' = t + \varepsilon$, $q_i(t) \rightarrow q'_i(t) = q_i(t - \varepsilon) \approx q_i - \varepsilon \dot{q}_i \Rightarrow$ 生成元 $Q_i = -\dot{q}_i$
[N] R1 的时间坐标支持平移

Step 2 — 若 $\partial L / \partial t = 0$ （不显含时），则变换为对称性： $L' - L = \varepsilon dL/dt \Rightarrow F = -L$

Step 3 — Noether 荷： $Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\dot{q}_i) - (-L) = -\sum_i p_i \dot{q}_i + L = -H$

Step 4 — $d(-H)/dt = 0 \Rightarrow dH/dt = 0$ 。定义能量 $E \equiv H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ [N]
 $\partial L / \partial t = 0$ ——若 L 显含时， $dH/dt = -\partial L / \partial t \neq 0$

Step 5 — $dE/dt = 0$ 。 [S] $\partial L / \partial t = 0 + \text{Noether} \Rightarrow$ 能量守恒。

关键洞察：能量守恒不是“我们观察到能量总是守恒”——它是时间平移对称性的逻辑推论。如果明天物理定律和今天一样（ $\partial L / \partial t = 0$ ），则今天和明天的总能量必须相等。反过来，在膨胀宇宙中（度规显含时间），Noether 定理不保证全局能量守恒——而 GR 确实不保证。对称性 = 守恒，不多不少。

数学 $\rightarrow$ 物理桥梁： $\partial L / \partial t = 0$ （时间平移对称性）

$\xrightarrow{\text{Noether}} dH/dt = 0$ （能量守恒）

物理 $\rightarrow$ 数学桥梁：物理定律不随时间改变 $\rightarrow$ 宇宙有一个“不随时间改变的量”——能量
这不是哲学——这是 Noether 定理的严格数学推论

能量守恒的验证——从焦耳到 LHC

- **焦耳实验 (1843)**: 用下落的重物搅动水, 测量水温升高——机械能完全转化为热能。这是能量守恒的第一个定量验证
- **核反应**: α 衰变中母核质量 - (子核质量 + α 粒子质量) = Δm , 释放能量 $\Delta E = \Delta mc^2$ 。验证精度 $\sim 10^{-7}$
- **LHC 对撞**: 质子-质子对撞能量 13.6 TeV——终态所有粒子的能量和动量在探测器中被重建。总能量守恒在 $\sim 1\%$ 精度内核验
- **引力波 GW150914**: 两个黑洞 ($36+29 M_\odot$) 合并为一个 $62 M_\odot$ 的黑洞—— $3 M_\odot c^2 \approx 5 \times 10^{47}$ J 的能量以引力波形式辐射。LIGO 探测到的波形与 GR 的能量辐射预言吻合

10.6 动量守恒

10.6.1 物理直觉: 为什么动量守恒?

空间平移不变性说: 物理定律在这里和在那里相同。这意味着如果你把整个实验装置平移 1 米, 结果不变。Noether 定理的推论: 存在一个不随时间改变的量——动量。这不是巧合——这是必然。

但有一个重要的细微之处: **电磁场本身携带动量**。考虑两个运动的点电荷——它们之间的电磁力并不满足 Newton 第三定律 (力的强形式, 即力沿连线)。系统的”机械动量”不守恒。但总动量 (机械 + 电磁场) 守恒。场不是虚拟的——场是真实的物理实体, 携带动量、能量和角动量。

电磁场动量密度: $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ (Poynting 矢量除以 c^2)。这解释了为什么光有”辐射压力”——光子将动量转移给被照亮的表面。

动量守恒

$d\mathbf{P}/dt = 0$ (孤立系统) **前提**: Noether 定理 (空间平移对称性)

变量: 总动量 $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$ [$\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$]。

推导: 空间平移对称性到动量守恒

Step 1 — 空间平移: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}$ ($\hat{\mathbf{n}}$ 为任意方向) $\implies$ 生成元 $Q_i = \hat{\mathbf{n}}$

Step 2 — 若 V 仅依赖粒子间相对距离 $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, 则 L 平移不变 [N] 无外力场破坏空间均匀性

Step 3 — Noether 荷: $Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\sum_i m_i \mathbf{v}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}}$

Step 4 — 对所有方向成立 $\implies \mathbf{P}$ 矢量守恒 [N] 孤立系统 (无外力)

10.7 角动量守恒

角动量守恒

$d\mathbf{L}/dt = 0$ (孤立系统, 有心力) 前提: Noether 定理 (旋转对称性)

变量: 总角动量 $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ [$\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$], 旋转角 $\delta\theta$ [1], 旋转轴 $\hat{\mathbf{n}}$.

推导: 旋转对称性到角动量守恒

Step 1 — 绕 $\hat{\mathbf{n}}$ 的无穷小旋转: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \varepsilon(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \Rightarrow$ 生成元 $Q_i = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i$ [N] R1:

$D = 3 \Rightarrow \text{SO}(3)$ 旋转群

Step 2 — 有心力势 $V(r)$ 仅依赖 $|\mathbf{r}| \Rightarrow L$ 旋转对称 [N] 势能仅依赖距离 (有心力)

Step 3 — Noether 荷: $Q = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}$ (标量三重积循环置换)

Step 4 — 对任意 $\hat{\mathbf{n}}$ 成立 $\Rightarrow \mathbf{L}$ 矢量守恒

关键洞察: 角动量守恒 + Kepler 第二定律是一回事。行星在近日点运动得更快, 在远日点更慢——因为在相等时间内扫过的面积相等。这是 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 为常数的几何表达。Noether 将这一直觉——旋转对称 $\rightarrow$ 角动量守恒——严格化。

10.7.1 角动量的量子化

在量子力学中 (R4), 角动量不是连续变量——它是量子化的, 单位是 $\hbar$:

$$\hat{L}^2 |\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell, m\rangle, \quad \hat{L}_z |\ell, m\rangle = \hbar m |\ell, m\rangle$$

其中 $\ell = 0, 1, 2, \dots$ (轨道) 或半整数 (自旋), $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$ 。轨道的旋转对称性 (SO(3)) 将角动量量子化——这不是额外公理, 而是 R4c (正则对易关系) 加 SO(3) 群表示的必然推论。

更深刻的是: **自旋角动量**——粒子的”内禀”角动量——不是来自空间旋转, 而是来自 Lorentz 群的旋量表示。自旋-1/2 粒子 (电子、质子、中子) 的波函数在 2π 旋转下变号 ($\psi \rightarrow -\psi$)——这是”旋量”的数学特性, 没有经典对应物。但自旋仍然贡献角动量, 且总角动量 (轨道 + 自旋) 在旋转对称下守恒。

角动量守恒的数量级

- **地球-月球系统:** 地球自转的角动量因潮汐摩擦逐渐转移给月球——月球每年远离地球 ~ 3.8 cm。总角动量守恒——地球自转减慢的角动量恰好等于月球轨道角动量的增加
- **脉冲星:** 蟹状星云脉冲星 ($M = 1.4M_\odot$, $R = 10$ km, $P = 33$ ms) ——角动量 $L \sim I\omega \sim 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 。即使经过千年, 自转减慢极小——因为空间旋转对称性保护角动量
- **粒子物理:** $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 衰变——光子对的总角动量 = 0 (来自 π^0 的自旋 0) ——这约束了光子的偏振关联。违反角动量守恒的信号会在偏振关联中立即暴露

10.8 电荷守恒

电荷守恒

$\partial_\mu J^\mu = 0$; 全局 $dQ/dt = 0$ **前提**: Noether 定理 + $U(1)$ 规范对称性 (R3)

变量: 守恒流 J^μ ($J^0 = c\rho_q$ [L⁻³·T·I], $J^i = \mathbf{J}$ [L⁻²·I]) , 总电荷 $Q = \int \rho_q d^3x$ [T·I], 复标量场 ψ [E]。

推导: $U(1)$ 全局对称性 $\rightarrow$ 电荷守恒

Step 1 — 全局 $U(1)$ 变换 ($\alpha = \text{常数}$) : $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, $\psi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^*$ [N] ψ 场有 $U(1)$ 对称性 (带电)

Step 2 — 复标量场 Lagrangian: $\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi$ ($U(1)$ 不变)

Step 3 — Noether 流 (场论形式) : $J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}(i\psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}(-i\psi^*) = i(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$

Step 4 — $\partial_\mu J^\mu = 0$ (Noether 定理直接结论)

Step 5 — 全局电荷守恒: $dQ/dt = \frac{d}{dt} \int J^0 d^3x = - \int \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x = - \oint_{S_\infty} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0$ [N] 孤立系统 (无穷远处 $\mathbf{J} = 0$)

关键洞察: 电荷守恒的深层含义: Noether 定理从全局 $U(1)$ 对称性推出电荷守恒。但当我们推广到局域 $U(1)$ (R3) 时, 电磁力必然出现——而且电动力学自动保证电荷局域守恒: $\partial_\mu J^\mu = 0$ 正是 Maxwell 方程的自洽性条件 ($\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0$)。全局对称性给出守恒律, 局域对称性给出力——两者不是一个层次的物理。

10.8.1 如果电荷不守恒——电子会不会衰变?

电荷守恒是所有守恒律中检验最严格的之一。如果电荷不守恒, 电子可以衰变—— $e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$ 。Borexino 实验搜索这一衰变——发现电子寿命下限为 $> 6.6 \times 10^{28}$ 年。这比宇宙年龄 (1.38×10^{10} 年) 长 10^{18} 倍。电子的稳定性是 $U(1)$ 对称性保护的结果——而 $U(1)$ 对称性又由 Noether 定理保护。Noether 定理的实验验证可以精确到宇宙年龄的十亿亿倍。

10.9 超越 Noether: 拓扑守恒律

并非所有守恒量都源自 Noether 定理。某些守恒量来自拓扑——场的整体结构, 而非局部对称性:

磁单极子的 Dirac 量子化: 若磁单极子存在, 电荷必须量子化: $eg = n\hbar/2$ (g 为磁荷)。这不是 Noether 推论——它来自波函数单值性的拓扑要求。

孤子守恒: Sine-Gordon 方程的解中存在不随时间改变的拓扑孤子——其守恒来自场的边界条件 (缠绕数), 而非 Lagrangian 的对称性。

结论: Noether 定理捕获了守恒律的”主要来源”——但拓扑和量子反常可以产生 (或破坏!) 额外的守恒结构。

10.10 自发对称性破缺与 Goldstone 定理

Noether 定理告诉我们对称性 $\rightarrow$ 守恒量。但对称性可以被**自发破缺**——Lagrangian 有对称性，但基态（真空）破坏了这个对称性。这导致两种后果：

10.10.1 全局对称性自发破缺：Goldstone 定理

定理 (Goldstone 1961) : $[S]$ 若连续全局对称性自发破缺，则存在零质量、零自旋的玻色子——Goldstone 玻色子。每个破缺的连续对称性生成元 $\rightarrow$ 一个无质量模式。

实例：

- **手征对称性自发破缺：**QCD 中 $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$ ——产生三个 π 介子 ($\pi^\pm, \pi^0$) 作为赝 Goldstone 玻色子。 π 介子的质量 (~ 140 MeV) 远小于核子质量 (~ 940 MeV)——因为手征对称性是近似的（夸克质量不为零）。
- **铁磁体：**自旋旋转对称性在 Curie 温度以下自发破缺——产生自旋波 (magnon) 作为 Goldstone 模式。

10.10.2 局域对称性自发破缺：Higgs 机制

关键区别： $[S]$ 局域规范对称性自发破缺**不**产生无质量 Goldstone 玻色子。破缺的规范对称性的”Goldstone 模式”被规范场”吃”掉了——规范场获得质量。这是第 14 章 Higgs 机制的核心，此处仅点明其与 Noether 定理的关系：

关键洞察：Noether 定理 + 自发对称性破缺 = 物理学最深刻的组合之一。Noether 告诉你对称性 $\rightarrow$ 守恒律；Goldstone 告诉你破缺的对称性 $\rightarrow$ 无质量粒子；Higgs 告诉你局域对称性破缺 $\rightarrow$ 有质量的规范玻色子。三者合在一起，构成了从对称性到粒子谱系的完整链条。

为什么 Goldstone 定理不矛盾于 Noether 定理？

Noether 定理说：对称性 $\rightarrow$ 守恒流 $\rightarrow$ 守恒荷。Goldstone 定理说：破缺的连续对称性 $\rightarrow$ 无质量玻色子。两者不矛盾——Noether 定理仍然保证存在守恒荷（即使对称性自发破缺，Lagrangian 的对称性不变），Goldstone 定理进一步告诉你这个破缺的动力学后果（基态上有无质量激发）。

10.11 守恒律作为物理学的”选择机制”

守恒律不仅仅是”某些量不变”——它们还约束物理过程**能不能发生**。这是物理学最强大的工具之一：

守恒律	允许的过程	禁止的过程
能量守恒	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ (中子衰变)	能量凭空产生
动量守恒	Compton 散射 $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	单个粒子自发分裂 (动量不匹配)
角动量守恒	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ (两光子角动量 = 0)	$\pi^0 \rightarrow 1\gamma$ (单光子必有非零角动量)
电荷守恒	$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ (正负电子湮灭)	$e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$ (电荷 $1 \rightarrow 0 + 0$)

重子数守恒 (SM 中近似) $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ $p \rightarrow e^+ + \pi^0$ (重子数 $1 \rightarrow 0 + 0$)

Table 10.2: 守恒律作为过程选择机制

10.12 从 Noether 到标准模型：对称性决定一切

标准模型的全部结构——粒子的存在、力的类型、守恒律——几乎完全由其**对称性**决定：

对称性	产生的结构	Noether/物理后果
时空平移 (R1)	四维动量	能量守恒 + 动量守恒
Lorentz 不变性 (R1)	自旋分类	角动量守恒 (轨道 + 自旋)
$U(1)_Y$ 超荷 (R3)	B 规范场	超荷守恒
$SU(2)_L$ 弱同位旋 (R3)	$W^\pm, W^0$ 规范场	弱同位旋守恒 (自发破缺后仍有 Higgs 残余)
$SU(3)_C$ 色 (R3)	8 个胶子	色守恒——夸克禁闭的最终来源
$U(1)_{EM}$ (破缺后剩余)	光子	电荷守恒 ($\leftarrow$ SSB 之后的有效 $U(1)$)

关键洞察：标准模型 = $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的规范理论 + 自发对称性破缺。这个简单的代数结构——加上夸克和轻子的表示——决定了所有基本粒子的存在和所有基本力的类型。Noether 定理是理解这个结构的逻辑钥匙。

10.13 反常：当对称性在量子层面破缺

一个经典对称性可能在量子层面被破坏——这称为**反常** (anomaly)。最著名的例子是轴矢流反常：经典层面 $\partial_\mu J_5^\mu = 0$ (手征对称性)，但量子修正 (三角图) 产生 $\partial_\mu J_5^\mu = (e^2/16\pi^2) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \neq 0$ 。这导致 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 的衰变率比经典预言快——实验精确验证了这一反常修正。

反常消除是标准模型自洽性的核心约束：标准模型的夸克-轻子代数恰好使所有规范反常消失 ($\sum_i Y_i = 0, \sum_i Y_i^3 = 0$ 等)。这不是“选出来的”——自然界如果选择了有反常的粒子内容，量子场论将是不自洽的。量子理论的自洽性本身约束了可能的粒子内容——这是“理论选择物质”的最强例证。

10.14 守恒律总览

守恒量	对称性	Noether 荷	前提
能量 E	时间平移	$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$	$\partial L / \partial t = 0$
动量 $\mathbf{P}$	空间平移	$\sum m_i \mathbf{v}_i$	无外力
角动量 $\mathbf{L}$	旋转	$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$	有心力
电荷 Q	$U(1)$ 规范	$i(\psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^*)$	$U(1)$ 对称性

Table 10.3: 守恒律与对称性的双向对应 (逆 Noether 定理：每个守恒量 $\leftrightarrow$ 一个对称性)

补充规则：连续性方程 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 是每个守恒律的局部微分形式 (rule.conservation_continuity)，它保证了守恒量的**局域守恒**——总量变化只能通过边界流实现，不能“凭空出现或消失”。

关键洞察：守恒律的局部形式 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 告诉我们：如果你在一个小区域内数电荷（或能量、动量），任何变化都必定伴随着流入或流出的流。没有“凭空创造”或“凭空消失”。这是所有守恒律的共同数学结构——它是微分形式的“守恒”。

数学→物理桥梁：全局对称性 $\xrightarrow{\text{Noether}}$ 守恒流 J^μ , $\partial_\mu J^\mu = 0$
 $\xrightarrow{\text{Gauss}}$ 守恒荷 $Q = \int J^0 d^3x$, $dQ/dt = 0$

物理→数学桥梁：对称性 → 每一个对称变换的“方向”上存在一个不随时间改变的量
 这个量在局部满足连续性方程，在全局是守恒荷——结构完全统一

四大守恒律的实验验证精度

- **能量守恒：**在核反应中验证到 $\sim 10^{-7}$ (α 粒子能量 + 反冲核能量 = 母核衰变能)
- **动量守恒：**粒子物理中的 Dalitz 图分析验证到 $< 10^{-3}$ 精度
- **角动量守恒：**天体力学（行星轨道）验证到 10^{-8} ——Laplace 用角动量守恒解释了木星和土星轨道的稳定性
- **电荷守恒：**电子衰变 ($e \rightarrow \nu\gamma$) 未被观测到——寿命下限 $> 6.6 \times 10^{28}$ 年 (Borexino 实验)，比宇宙年龄长 10^{18} 倍。电荷守恒是检验最严格的守恒律之一
- **重子数守恒**（不是从 Noether 推出的！）：质子衰变未被观测到——寿命下限 $> 10^{34}$ 年 (Super-Kamiokande)。重子数守恒在 SM 中是偶然的全局对称性，在 GUT 中可能破缺

四大守恒律精度

能量守恒：**[精确]**在时间平移不变时；**[近似]**在宇宙学尺度（无全局时间平移对称性）

动量守恒：**[精确]**在空间均匀时（从 Noether 定理保证）

角动量守恒：**[精确]**在旋转对称时；取决于 $D = 3$ (SO(3) 群结构)

电荷守恒：**[精确]** ($U(1)$ 规范对称性的精确推论)

所有四个守恒律：在各自对称性精确成立时是**精确的**，在对称性近似成立时是**近似的**

习题

1. **[简单]** 从 Noether 定理推导时间平移 $\rightarrow$ 能量守恒。哪步要求 $\partial L / \partial t = 0$ ？若 L 显含时， dH/dt 等于什么？
2. **[简单]** 两粒子系统 $L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ ：空间平移 $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}$ 是对称性，用 Noether 求守恒量。
3. **[中等]** 从场论 Noether 流 $J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi$ 出发，对复标量场和 $U(1)$ 变换，导出电荷守恒流并验证 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 。

4. [中等] 若 $V = kx^2 + 2ky^2$ (破坏旋转对称), 角动量的哪个分量不守恒? 用 Noether 验证。
5. [较难] 逆 Noether 定理: 对一维系统 $H = p^2/(2m) + V(x)$, 若 H 守恒, 能否反推 $\partial L/\partial t = 0$?
6. [挑战] GR 中无全局时间平移对称 (膨胀宇宙), Noether 不保证全局能量守恒。但为什么太阳系仍见能量守恒? GR 中 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 如何退化到 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$?

反事实分析

若时间平移对称性破缺 (能量不守恒)

- 若 $\partial L/\partial t \neq 0$ (系统 Lagrangian 显含时间): $dH/dt = -\partial L/\partial t \neq 0$ ——能量不守恒
- **现实例子:** 膨胀宇宙的度规显含时间——宇宙总能量无全局守恒定义 (但 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 仍成立)
- 若能量不守恒在所有尺度上都成立——永动机可能——宇宙不存在稳定物质结构

若电荷不守恒 ($U(1)$ 对称性破缺)

- 电子可衰变 $e \rightarrow \nu\gamma$ ——所有原子不稳定
- 电流连续性方程 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 破缺——Maxwell 方程需要修改
- 实验: 电子寿命 $> 6.6 \times 10^{28}$ 年 (Borexino) —— $U(1)$ 对称性保护得极其牢固

Chapter 11

维度结构推论： $D=3+1$ 的七条后果

为什么时空维数是偶然事实

R1 声明”我们的时空是 $3+1$ 维”。但为什么不是 $2+1$ ？为什么不是 $4+1$ ？理论物理学家可以构造任意维数的自洽引力理论和量子场论——但我们的宇宙恰好选择了 $D=3$ （空间）+ 1 （时间）。

这个选择产生了深远的结构后果。以下七条推论展示了：**若 $D \neq 3+1$ ，我们熟悉的物理世界——原子、行星轨道、清晰的声音——统统不会存在。**这不是一个可有可无的参数，而是构成我们这个宇宙”为什么是这个样子”的核心约束。

11.0.1 科普层：Ehrenfest 的问题——为什么是 3 维？

1917 年，荷兰物理学家 Paul Ehrenfest 发表了一篇著名的短文，问了一个孩子般的问题：为什么空间是三维的？他的答案出人意料地精确：

- **$D \neq 3$ 时没有稳定行星轨道。**向心力和离心力的平衡在 $D \neq 3$ 时不存在——地球要么坠入太阳，要么飞入深空。没有稳定轨道 = 没有太阳系。
- **$D \neq 3$ 时没有稳定原子。**氢原子在 $D = 4$ 时电子要么坠入质子要么逃逸——没有化学，没有生命。
- **$D \neq 3$ 时波传播不”干净”。**在奇数维空间中，波传播后立即恢复寂静（Huygens 原理）。在偶数维空间中，波会”拖尾”——声音会持续回响。你的每一次对话都会和之前的回音重叠成噪音。
- **$D \neq 3$ 时你的身体不能存在。**在二维空间中，一个连通物体（如你的消化系统）不能有穿过身体的”洞”——你无法有嘴和肛门同时存在。拓扑学约束使复杂的生物体不可能存在于 $D = 2$ 的宇宙中。

这不是巧合。这七个”恰好”构成了所谓的”人择原理”（anthropic principle）的最强证据之一——不是”宇宙被设计为适合生命”，而是”如果宇宙不是 $3+1$ 维，我们就不会在这里提出这个问题”。

关键洞察：Ehrenfest 的分析的深意： $D=3+1$ 不是 T+EP 推导出来的——它是 contingent 事实。但一旦给定 $D=3+1$ ，所有我们熟悉的物理结构——稳定轨道、原子、化学键——就成为可能。这不是设计——这是选择效应。

关键概念：Contingent 事实

在本书的公理体系中，D=3+1 被归类为 **contingent**（偶然）事实——它不由 T+EP 推导出来，而是我们这个宇宙的”初始条件”之一。然而，一旦给定 D=3+1，大量结构后果就可以从 kernel 前提中严格推导出来。本章展示这七条后果。

11.1 平方反比律：为什么力是 $1/r^2$ **11.1.1 物理直觉**

把一个小灯泡放在一个黑盒子的中心。你站在盒子的内壁上——距离灯泡越远，单位面积上接收到的光就越少。因为光均匀地向四面八方传播，在半径 r 处它分散在半径为 r 的球面上。球面积 $\propto r^2$ ，所以光强 $\propto 1/r^2$ 。

同样的逻辑适用于任何从点源发出、在空间中守恒地传播的量——无论是引力（”引力线”从质量出发）、静电（”电力线”从电荷出发），还是声强。

11.1.2 严格推导**推导：平方反比律** $\leftarrow$ kernel.spacetime_dimensionality

前提： D 维空间（R1 中 $D = 3$ ）

步骤 1：Gauss 定律在 D 维空间的通量形式

$$\oint_{S^{D-1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \propto r^{D-1} F(r) \quad (11.1)$$

$(D-1)$ -维球面面积 $S^{D-1} \propto r^{D-1}$ 。通量 = 场强 $\times$ 面积。

步骤 2：通量与源强成比例（Gauss 定律的物理内容）

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \text{常数} \cdot Q \quad (11.2)$$

其中 Q 为源强（质量 M 或电荷 q ）。 $\boxed{[N]}$ Gauss 定律必须有效（依赖于力的守恒性）。

步骤 3：联立求解 $F(r)$

$$F(r) \cdot r^{D-1} \propto \text{常数} \Rightarrow F(r) \propto \frac{1}{r^{D-1}} \quad (11.3)$$

步骤 4：代入 $D = 3$

$$D = 3 \Rightarrow F(r) \propto \frac{1}{r^2} \quad (11.4)$$

结果：平方反比律。适用于引力和静电学。 $\boxed{[S]}$ $D = 3 + \text{Gauss 定律} + \text{球对称} \Rightarrow F \propto 1/r^2$ 。

关键洞察：平方反比律不是”自然界选择了 $1/r^2$ ”——它是 $D = 3$ 空间的几何必然。Gauss 定律说通量 = 常数 $\times$ 源强； D 维球面面积 $\propto r^{D-1}$ ；两者相除 $\Rightarrow F \propto 1/r^{D-1}$ 。对 $D = 3$ ， r^2 。力律的指数就是空间维数减 1。

数学→物理桥梁: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \text{const} \cdot Q$

$$S^{D-1} \propto r^{D-1}$$

$$\Rightarrow F(r) \propto 1/r^{D-1} \xrightarrow{D=3} 1/r^2$$

物理→数学桥梁: 几何 (球面积随 r 增长) → 物理 (力随距离衰减)

空间维数直接决定了力的衰减速率——这就是 $R1(D=3)$ 的力量

反事实: 若 $D \neq 3$

- $D = 2$: $F \propto 1/r$ ——太弱。行星轨道不稳定 (离心势 $\propto 1/r^2$ 在小 r 时压倒引力势 $\propto -\ln r$ 或 $-1/r$)。
- $D = 4$: $F \propto 1/r^3$ ——太强。无稳定轨道 (见 §11.3)。
- $D = 1$: F 为常数——无距离衰减, 力无限远。

11.2 $SO(3)$ 旋转群: 为什么角动量有三个分量

在 D 维空间中, 旋转群是 $SO(D)$ 。 $SO(D)$ 的 Lie 代数维数 (独立的旋转生成元数目) 为:

$$\dim(SO(D)) = \frac{D(D-1)}{2} \quad (11.5)$$

对 $D = 3$: $\dim(SO(3)) = 3$ ——恰好三个角动量分量 L_x, L_y, L_z 。

三个生成元的对易关系定义了 $\mathfrak{so}(3)$ Lie 代数:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k \quad (11.6)$$

其中 ε_{ijk} 是三维全反对称 Levi-Civita 符号——它仅在 $D = 3$ 时有与生成元个数相同的指标。

关键洞察: $SO(3)$ 的 Lie 代数维数 $\dim = D(D-1)/2$ 。 $D = 3 \Rightarrow 3$ 个生成元 (L_x, L_y, L_z)。 $D = 2 \Rightarrow 1$ 个 (只有 L_z)。 $D = 4 \Rightarrow 6$ 个 (角动量有 6 个分量!)。角动量的量子结构——包括原子轨道的 $2\ell + 1$ 简并度——由 $SO(3)$ 的表示论完全确定。

为何这很重要

- 角动量量子化: $L_z = m_\ell \hbar$, $m_\ell \in \{-\ell, \dots, +\ell\}$ ——共 $2\ell + 1$ 个本征态。
- 原子中电子的轨道角动量量子化是元素周期表和化学键的基础。
- 若 $D \neq 3$, 角动量的量子结构完全不同——原子无球对称轨道, 周期表不存在。

11.3 稳定 Kepler 轨道: 为什么行星不坠入太阳

考虑质量为 m 的粒子在中心引力场中运动。 D 维的有效势能为:

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r^{D-2}} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (11.7)$$

第一项：引力势（来自 D 维 Gauss 定律的 $1/r^{D-2}$ 律）。第二项：离心势（来自角动量守恒，与 D 无关）。

稳定圆轨道的存在条件： $dV_{\text{eff}}/dr = 0$ （极值）且 $d^2V_{\text{eff}}/dr^2 > 0$ （局部极小）。

求导后，二阶导数在极值点处为：

$$\left. \frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r^*} = \frac{L^2(3-D)}{mr^{*4}} \quad (11.8)$$

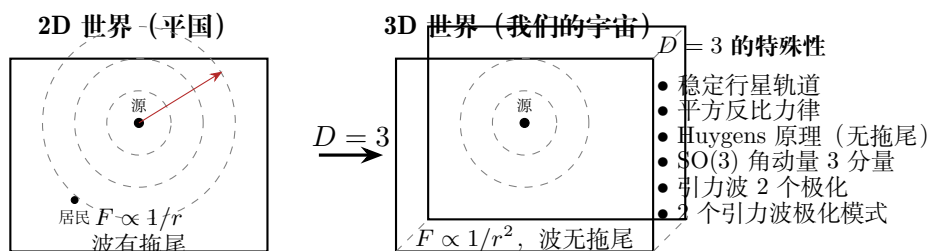
仅当 $D \leq 3$ 时的二阶导数才非负。Bertrand 定理进一步证明：仅 $D = 3$ 且势 $\propto 1/r$ 时，所有束缚轨道都是闭合的椭圆。

反事实：若 $D > 3$

- 无稳定 Kepler 轨道 $\rightarrow$ 无行星系统、无原子（电子轨道不稳定）。
- 离心势在小 r 时不能支配引力势，粒子或螺旋坠入中心，或飞向无穷。
- 结论： $D = 3$ 是存在稳定物质结构（从太阳系到原子）的**必要条件**。

[N] $D = 3$ 空间维数。[N] 保守力。[S] $D = 3 +$ 保守有心力 $\Rightarrow$ 稳定椭圆轨道。

11.3.1 不同维度的世界



11.4 Huygens 原理：为什么声音清晰、没有回响拖尾

波动方程 $\square\phi \equiv (\nabla^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2)\phi = 0$ 的 Green 函数在奇数和偶数空间维数中有根本不同的行为：

$$G(\mathbf{r}, t) \propto \begin{cases} \theta(ct - |\mathbf{r}|) & D = 1 \quad (\text{阶跃——信号到达后永不消退}) \\ \theta(ct - r)/\sqrt{c^2t^2 - r^2} & D = 2 \quad (\text{拖尾——主信号后有无限长余波}) \\ \delta(ct - r)/r & D = 3 \quad (\delta \text{ 函数——尖锐波前，无拖尾}) \end{cases} \quad (11.9)$$

[N] $D = 3$ （奇数维）。[S] $D = 3$ 奇数 + 自由空间 $\Rightarrow$ Huygens 原理成立。

关键洞察：奇数维空间中波传播是“干净”的——信号到达后立即消失（ δ 函数波前）。偶数维空间中波有“拖尾”——主信号到达后有无限长的余波。 $D = 3$ 是奇数 $\Rightarrow$ 我们可以清晰地听到声音、看到光脉冲。这不是巧合——听觉和视觉的可能性直接依赖于空间维数是奇数。

生活经验与物理学

在 $D = 3$ 的房间里，你说一句话，听众听到的是一个清晰的声音——主波前过后立刻安静。这背后是 Huygens 原理：次波仅在波前包络上干涉相长。在 $D = 2$ 的”平国”里，任何声音都会拖着无限长的余响——交流将是不可能的。

11.5 Minkowski 度规符号差

$D = 3$ 空间维 + 1 时间维 $\Rightarrow$ 度规符号差 (1,3):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (11.10)$$

符号差决定了因果结构——区分过去、现在与未来。[N] Lorentz 不变性 + $D = 3 + 1$ 。[S] 两者组合 $\Rightarrow$ Minkowski 度规。

关键洞察：度规符号差 (1,3) 是 Lorentz 不变性 + $D = 3 + 1$ 的直接推论。改变任何一个——例如 (2,2) (两个时间维) 或 (0,4) (纯空间)——因果结构完全不同。(2,2) 中有”封闭类时曲线” (时间旅行)——因果性 (R1 的核心) 崩塌。

11.6 引力波极化

线性化广义相对论中，度规扰动 $h_{\mu\nu}$ 在横向无迹 (TT) 规范下：

$$N_{\text{polarizations}} = \frac{D(D-3)}{2} \quad (11.11)$$

对 $D = 4$ ： $N = 2$ ——恰好 h_+ 和 $h_\times$ 两种极化模式。这对应无质量自旋-2 引力子的两个螺旋度态 (± 2)。

关键洞察： $N_{\text{pol}} = D(D-3)/2$ 。 $D = 4 \Rightarrow 2$ 个极化模式——LIGO 探测到的正是 h_+ 和 $h_\times$ 。若 $D = 5 \Rightarrow 5$ 个极化——引力波天线模式完全不同。 $D = 3 \Rightarrow 0$ 个极化——GR 无局域自由度，根本不存在引力波。

11.7 体积量纲与理想气体方程

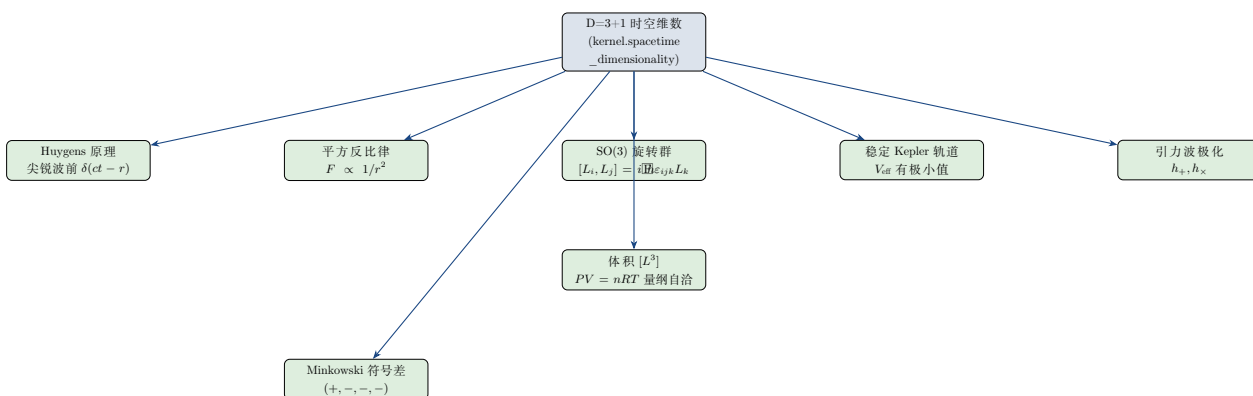
$D = 3$ 时体积 V 的量纲为 $[L^3]$ 。这保证了理想气体状态方程 $PV = nRT$ 的量纲一致性：

$$[P \cdot V] = [ML^{-1}T^{-2}] \cdot [L^3] = [ML^2T^{-2}] = [n \cdot R \cdot T] \quad (11.12)$$

[N] $D = 3$ + 量纲一致性。[S] 量纲运算自治。

11.8 七条推论的整体意义

七条推论共同回答了一个问题：”为什么我们的物理世界是这个样子？”。



核心结论： $D = 3 + 1$ 不是物理学家随意设定的参数——它是构成我们这个宇宙的稳定物质结构（原子、行星、清晰信号传播）的**必要条件**。若 $D \neq 3 + 1$ ，你将不会存在，这本书也不会存在。这不是人存原理的循环论证——这是从物理定律到结构后果的严格推导。

反事实分析

若 D

- 引力 $F \propto 1/r$ （而非 $1/r^2$ ）——势为 $\ln r$ ，无稳定行星轨道
- 静电 $F \propto 1/r$ ——同样不稳定
- 无引力波局域自由度——GR 在 $D = 3$ 中无传播模式
- Huygens 原理破缺——声音有拖尾，通信困难
- 角动量只有一个分量（ $SO(2) = U(1)$ 的生成元仅 1 个）
- **但：**可能有拓扑引力（Chern-Simons）、任意子统计——不同的有趣物理

若 D

- 引力 $F \propto 1/r^3$ ——太强。无稳定行星轨道
- Kepler 第三定律： $T^2 \propto a^4$ （而非 a^3 ）
- 引力波有 5 个极化模式（ $D(D-3)/2 = 5$ ）
- $SO(4)$ 的生成元数为 6——角动量有 6 个分量，量子结构完全不同
- 额外维度在弦论中被紧化——但如果它不是紧化的，我们的世界根本不同

11.9 七条推论的交叉印证

上述七条推论并非彼此独立——它们构成了一个交叉印证网：

推论	依赖的 $D=3+1$ 性质	与其他推论的交叉印证
平方反比律 $SO(3)$	球面积 $\propto r^{D-1}$ 旋转群的生成元数 = 3	若 $F \propto 1/r^{D-1} \neq 1/r^2$, Kepler 轨道不稳定 与角动量守恒 (Ch12) 一致——角动量的量子化 $\ell(\ell+1)\hbar^2$ 仅在 $SO(3)$ 下有效
稳定 Kepler 轨道	离心势 $\propto 1/r^2$ + 引力 势 $\propto -1/r$	若 $D \neq 3$, 太阳系不存在——没有行星, 没有“年”的概念
Minkowski 符号差	1 个时间 + 3 个空间 = Lorentz 符号差	与 $R1$ (因果结构) 一致——符号差决定了光锥的存在
Huygens 原理	D 为奇数 $\rightarrow$ 强 Huygens 原理	若为偶数维——无线电信号有拖尾——现在的通信系统全都不可用
引力波极化	$D(D-3)/2 = 2$ 个偏振	LIGO 探测到的两个偏振模式验证了 $D = 3 + 1$
体积量纲	$[V] = L^3$	与平方反比律一致——通量 $\propto r^{D-1} = r^2 \Rightarrow$ 力 $\propto 1/r^2$

Table 11.1: 七条维度结构推论的交叉印证网

关键洞察: 七条推论不是独立的——它们是从 $R1(D = 3 + 1)$ 这个单一 contingent 事实推导出的七个不同侧面。每条推论在与其他推论的交叉印证中增加了自身的可信度。

11.10 人择原理的物理学版本

上述分析引出一个无法回避的问题: 为什么 $D = 3 + 1$? 物理学给出两种可能的回答:

1. **弱人择原理:** $D = 3 + 1$ 是唯一允许观察者 (我们) 存在的维数。如果 $D \neq 3 + 1$, 就没有稳定原子, 没有生命, 没有人提出“为什么是 $D = 3 + 1$ ”这个问题。这不是解释——这是选择效应。
2. **弦论/量子引力的解答:** 10 或 11 维时空中的 6 或 7 个空间维在 Planck 尺度被紧化—— $D = 3 + 1$ 是紧化后剩余的低能有效维数。但为什么恰好 3 个非紧化空间维? 目前不知道。

Ehrenfest (1917) 的当代意义

1917 年 Ehrenfest 提出的问题——“为什么空间是三维的”——至今仍然没有一个被普遍接受的物理学答案。人择原理给出了一个逻辑自洽的回答, 但许多物理学家认为这不够“scientific”。

本书的立场: $D = 3 + 1$ 是 contingent 事实——不由 $T+EP$ 推导, 但在 $T+EP$ 的公理体系中它是一个必须被声明的输入参数。一旦输入, 43 条推导链中的至少 7 条 (G9) 可以得到严格推导。**物理学告诉你给定 $D=3+1$ 后的全部推论——但不告诉你“为什么”是 $D=3+1$ 。**

实验验证

D

- **平方反比律的检验**：Coulomb 定律在 10^{-16} m 到 10^7 m 的尺度上精确满足 $F \propto 1/r^2$ ——任何偏离都意味着 $D \neq 3$ 或光子有质量
- **引力平方反比律的检验**：扭摆实验在亚毫米尺度检验 $F \propto 1/r^2$ ——若 $D > 3$ ，在小尺度（额外维度尺度）应有偏离。当前实验排除 $> 44 \mu\text{m}$ 的额外维度
- **引力波极化**：LIGO/Virgo 只探测到两个极化模式——与 $D = 3 + 1$ 的预言一致。三个探测器（LIGO Hanford, LIGO Livingston, Virgo）可分辨极化模式
- **Huygens 原理的验证**：声波和电磁波在 $D = 3$ 空间中传播后立即恢复寂静——任何“拖尾”信号都会被雷达和声纳探测到
- **更高维度的可能性**：弦论允许额外维度被紧化在 Planck 长度。但任何 $> 10^{-19}$ m 的额外维度在当前的 LHC 能标（ $\sim 10^{-19}$ m）下都应产生可观测信号——至今零结果

习题

1. [简单] 从 Gauss 定律 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \text{const} \cdot Q$ 出发，证明在 D 维空间中 $F(r) \propto 1/r^{D-1}$ 。对 $D = 2, 3, 4$ 分别如何？
2. [中等] 用有效势 $V_{\text{eff}}(r) = -k/r + L^2/(2mr^2)$ 分析 $D = 4$ 空间的 Kepler 问题：向心势变为 $-k/r^2$ ，离心势为 $L^2/(2mr^2)$ ，两者都以 $1/r^2$ 衰减——是否存在稳定圆轨道？
3. [中等] 推导在 D 维时空中引力波的独立极化模式数为 $D(D-3)/2$ 。解释为什么在 $D = 4$ 时恰好为 2。
4. [较难] 对三维波动方程 $\square\phi = 0$ ，用 Kirchhoff 积分公式证明强 Huygens 原理（波前通过后场恢复为零）。对比 $D = 2$ 空间二维波方程的解——为什么有“拖尾”？
5. [挑战] 若存在一个大额外维度（半径 R ），在 $r \ll R$ 时引力为 $F \propto 1/r^{D-1}$ （ $D > 3$ ），在 $r \gg R$ 时恢复 $1/r^2$ 。用扭摆实验约束估算 R 的上限。

Chapter 12

标准模型有效场论：从规范群到物理预言

为什么标准模型不是 T+EP 的必然推论

T+EP 规定了物理定律的**形式**——规范对称性决定相互作用的种类，最小作用量决定动力学方程。但它们不规定具体的**参数**——是 $U(1)$ 还是 $SU(3)$ ？三代费米子还是四代？Higgs 是二重态还是三重态？

这些选择由我们这个宇宙的 contingent 事实决定（见附录 C 的 SM 部分）。然而，一旦给出了这些 contingent 输入—— $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范群、三代手征费米子内容、Higgs 二重态——大量物理预言就可以从 T+EP 严格推导出来。

本章展示三条最重要的推论：渐近自由、Higgs 机制、CKM 矩阵。

12.0.1 科普层：标准模型——”宇宙的成分表”

标准模型是人类最精确的科学理论。它描述了宇宙中所有已知的基本粒子（夸克、轻子、规范玻色子、Higgs）以及它们之间的三种相互作用（电磁、弱、强）。它的预言精度令人难以置信——电子的反常磁矩 $g - 2$ 被理论计算和实验测量在 12 位有效数字内吻合。

但标准模型不是一个”终极理论”。它有 19 个自由参数——这些参数的数值不由 T+EP 决定，必须由实验测量。为什么 $m_e = 0.511$ MeV 而不是别的值？为什么 $\alpha = 1/137.036$ ？标准模型无法回答这些问题。它告诉我们如何计算——给定这些参数——但它不解释参数为什么取这些值。

这就是”有效场论”的哲学：**我们不宣称 T+EP + SM 参数是”终极真理”。我们只是说：在我们迄今探索的所有能量尺度上，这是最佳的、与所有实验数据一致的理论。** 如果未来发现新物理（如超对称、额外维度），标准模型将作为低能有效理论被纳入更全面的框架——就像 Newton 引力被纳入 GR 一样。

12.0.2 为什么标准模型的成功反而是个问题

标准模型的巨大成功对物理学反而是个”尴尬”。LHC 已经运行了十多年，在 13.6 TeV 的对撞能量下——除了 Higgs（2012），没有发现任何超出标准模型的新粒子。超对称粒子被排除到 $\sim$ TeV 量级。额外维度被排除到 $\sim \mu\text{m}$ 量级。

这引发了所谓的”等级问题”（hierarchy problem）：为什么 Higgs 质量（125 GeV）比 Planck 质量（ 10^{19} GeV）小 17 个数量级？量子修正应该在 Planck 尺度截断——除非有某种

新的对称性（超对称？）保护 Higgs 质量。到目前为止，实验还没有找到这个对称性的任何迹象。

矛盾推动进步。 标准模型的成功本身——缺乏新物理——是当前理论物理学最大的谜题之一。

Contingent 事实 + T+EP

标准模型不是从 T+EP **必然**推出的——规范群的选择 ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$)、费米子代数 (3 代)、Higgs 表示 (二重态) 都是 contingent 事实。但**给定这些 contingent 输入后**，所有物理输出——渐近自由、 W/Z 质量谱、味混合矩阵——都是 T+EP 框架的严格推论。这就是”有效场论”哲学的极致：底层原理限制可能的结构，contingent 事实填充具体参数。

12.1 渐近自由：为什么夸克在**高能时自由、低能时禁闭**

12.1.1 物理直觉

想象两个带电粒子。它们之间的电场线在真空中从正电荷出发到负电荷。量子涨落——虚的电子-正电子对——会在真空中极化，部分屏蔽电荷。越靠近原电荷（高能、短距离），看到的”裸电荷”越大——这是 QED 的物理图像。

QCD 完全不同。胶子不仅传递强力——胶子自己也携带色荷。这个**自相互作用**导致了一个奇异的效果：真空中的虚胶子对**反屏蔽**色荷。越靠近夸克（高能），看到的色荷越小。在高能极限，夸克和胶子几乎自由——**渐近自由**。

12.1.2 严格推导：从 $SU(3)$ Yang-Mills 到 β -函数

推导：渐近自由 $\leftarrow$ contingent.sm_gauge_group + kernel.gauge_interactions

前提： $SU(3)_C$ Yang-Mills 理论 (QCD)， $N_c = 3$ 种颜色， $n_f = 6$ 种夸克味

步骤 1：重整化群方程 耦合常数的跑动由 β -函数描述：

$$\beta(g) \equiv \frac{\partial g}{\partial \ln \mu} \quad (12.1)$$

其中 g 为 $SU(3)_C$ 规范耦合， μ 为能量标度。

步骤 2：单圈 β -函数 (Gross & Wilczek; Politzer, 1973) 非 Abel 规范理论在单圈水平的 β -函数为：

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \cdot \beta_0 + \mathcal{O}(g^5), \quad \beta_0 = \frac{11N_c}{3} - \frac{2n_f}{3} \quad (12.2)$$

关键： 胶子自能图 (gluon loops) 贡献 $+11N_c/3$ (**反屏蔽**)，夸克圈 (quark loops) 贡献 $-2n_f/3$ (屏蔽，与 QED 同)。

步骤 3： β_0 的符号 对 QCD: $N_c = 3$, $n_f = 6$:

$$\beta_0 = \frac{11 \cdot 3}{3} - \frac{2 \cdot 6}{3} = 11 - 4 = 7 > 0 \quad (12.3)$$

$\beta_0 > 0 \Rightarrow \beta(g) < 0$ (对 $g > 0$) $\Rightarrow$ 耦合随能标增长而**减小**。[N] $n_f \leq 16$ (否则 β_0 变号，渐近自由丧失)。

步骤 4：求解 RG 方程 —— 对数跑动 定义 $\alpha_s(\mu) \equiv g^2/(4\pi)$ 。单圈 RG 方程为：

$$\frac{d\alpha_s}{d\ln\mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha_s^2 \quad (12.4)$$

积分得：

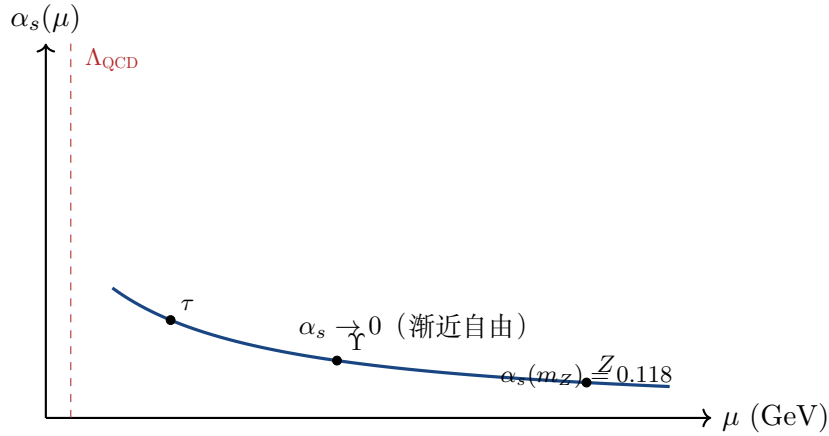
$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda_{\text{QCD}})} \quad (12.5)$$

其中 $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV}$ 是 QCD 的自然标度—— α_s 在此发散，标志着微扰论的失效和禁闭的起效。

步骤 5：渐近自由的物理后果

- $\mu \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_s(\mu) \rightarrow 0$ ：夸克和胶子在高能（短距离）时几乎自由
- $\mu \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}} \Rightarrow \alpha_s(\mu) \rightarrow \infty$ ：低能时长程力强到将夸克禁闭在强子内

[S] $SU(3)_C + n_f \leq 16 \Rightarrow \beta_0 > 0 \Rightarrow$ 渐近自由。



↔ 交叉印证：与 Lovelock 唯一性的平行

渐近自由与 Einstein 场方程的 Lovelock 唯一性（第 9 章）遵循相同的论证模式：**对称性 + 维数约束 $\Rightarrow$ 唯一可取的物理理论**。QCD 的渐近自由来自 $SU(3)_C$ 的 non-Abelian 结构 + $D = 4$ 的可重整性要求；Einstein 引力的唯一性来自广义协变性 + $D = 4$ 的 Lovelock 定理。这是“对称性决定动力学”原则在规范理论和引力理论中的双重印证。

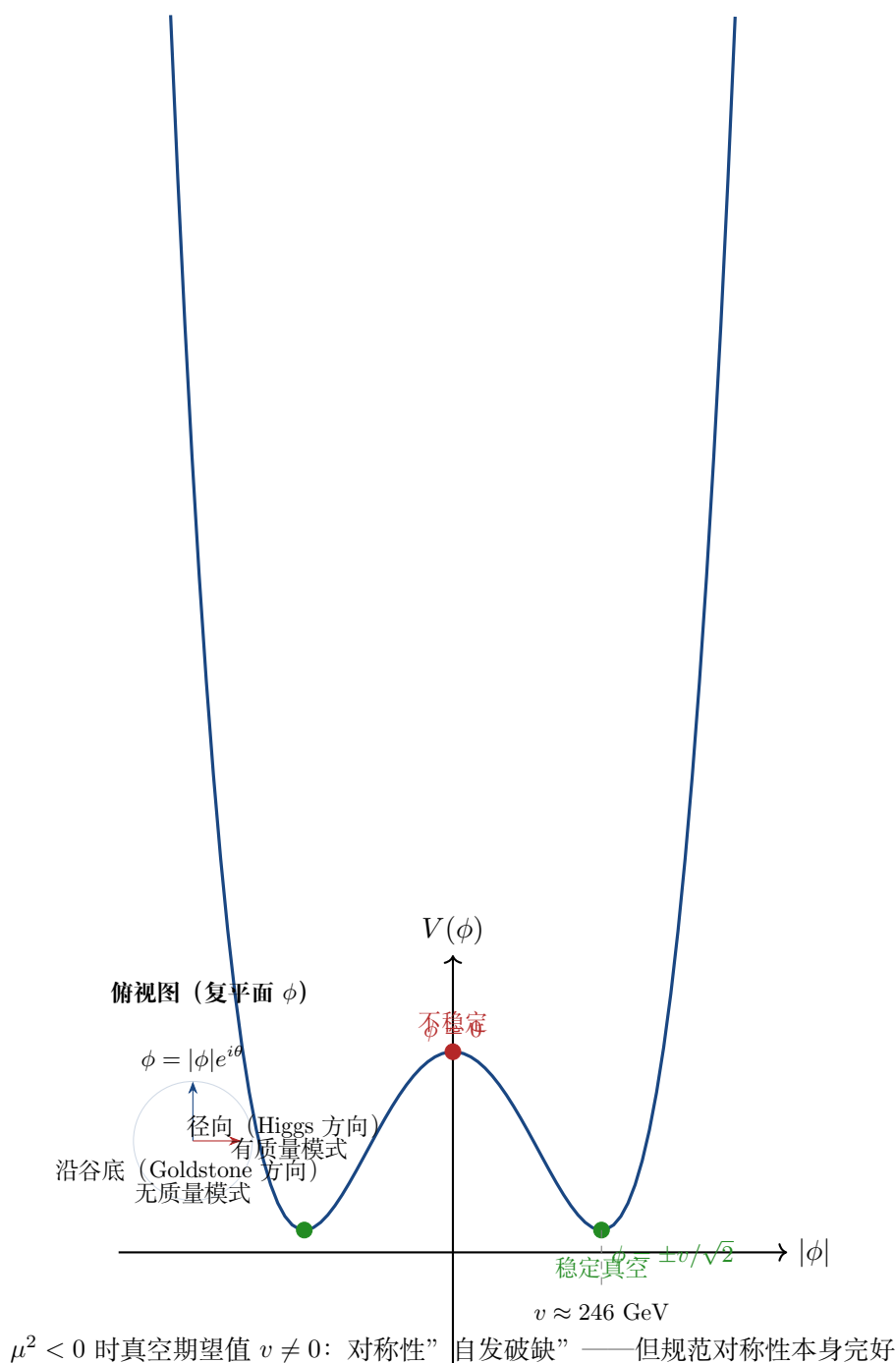
12.2 Higgs 机制：质量的起源

12.2.1 物理直觉

在 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论中，所有规范玻色子本应是无质量的——正如光子。但实验告诉我们， $W^\pm$ 质量约为 80.4 GeV， Z 约为 91.2 GeV——它们是有质量的！

质量从何而来？答案是**自发对称破缺**（Spontaneous Symmetry Breaking, SSB）。想象一个完全对称的墨西哥草帽势能：在中心（ $\phi = 0$ ）处是不稳定的对称态；球滚到帽檐的任意一点（ $\phi = v/\sqrt{2}$ ），对称性从 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ “自发破缺”到 $U(1)_{\text{EM}}$ 。

被”吃掉”的三个 Goldstone 玻色子变成了 $W^\pm$ 和 Z 的纵向极化模式——这就是质量。



12.2.2 严格推导

推导: Higgs 机制 $\leftarrow$ contingent.sm_gauge_group + contingent.sm_higgs_sector + kernel.gauge_interactions

前提: $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范群 + Higgs 二重态 $\phi = (\phi^+, \phi^0)^T$

步骤 1: Higgs 势与自发破缺

$$V(\phi) = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4, \quad \lambda > 0 \quad (12.6)$$

[N] $\mu^2 < 0$: 否则极小值在 $|\phi| = 0$ (无破缺)。当 $\mu^2 < 0$ 时, $V(\phi)$ 在 $|\phi|^2 = -\mu^2/(2\lambda) \equiv v^2/2$ 处取极小。

步骤 2: 真空期望值与么正规范 在么正规范中: $\phi(x) = (0, (v + h(x))/\sqrt{2})^T$, $\langle 0|\phi|0\rangle = (0, v/\sqrt{2})^T$ 。 $v \approx 246$ GeV。 $h(x)$ 为物理 Higgs 玻色子 ($m_h \approx 125$ GeV)。

步骤 3: 协变导数作用于 Higgs 真空

$$D_\mu \phi = \left[\partial_\mu - ig_2 \tau^a W_\mu^a - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \right] \phi \quad (12.7)$$

代入 $\phi = (0, v/\sqrt{2})^T$ (忽略 h 项, 聚焦质量生成)。

步骤 4: 动能项产生质量

$$|D_\mu \phi|^2 \Big|_{\phi=(0,v/\sqrt{2})} = \frac{g_2^2 v^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + \frac{v^2}{8} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)^2 \quad (12.8)$$

步骤 5: 物理质量本征态 定义:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad M_W = \frac{g_2 v}{2} \approx 80.4 \text{ GeV} \quad (12.9)$$

$$Z_\mu = \frac{g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad M_Z = \frac{\sqrt{g_2^2 + g_1^2} v}{2} = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \approx 91.2 \text{ GeV} \quad (12.10)$$

$$A_\mu = \frac{g_2 B_\mu + g_1 W_\mu^3}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad M_A = 0 \quad (12.11)$$

其中 $\tan \theta_W \equiv g_1/g_2$ (Weinberg 角, $\sin^2 \theta_W \approx 0.231$)。

[S] SM 规范群 + Higgs 二重态 + $\mu^2 < 0 \Rightarrow W/Z$ 有质量 + 光子无质量。

12.3 CKM 矩阵：味的混合与 CP 破坏的必然性

12.3.1 物理直觉

夸克有六种”味”：上 (u)、下 (d)、粲 (c)、奇 (s)、顶 (t)、底 (b) ——分为三代。弱相互作用通过 $W^\pm$ 玻色子将一个夸克”翻转”为另一个，但翻转不是在”质量本征态”之间直接发生的——中间夹着一个旋转矩阵：**CKM 矩阵**。

因为 Higgs 场给夸克质量的 Yukawa 耦合矩阵 Y^u 和 Y^d 是**独立**的任意 3×3 复矩阵，对角化它们时自然留下了一个不可消除的”错位”——这就是 CKM 矩阵。它的非对角元解释了 $s \rightarrow u$ (奇异数改变)、 $b \rightarrow c$ (底数改变) 等味改变衰变；它的复相位解释了 CP 破坏——物质与反物质行为的微妙不对称。

12.3.2 严格推导

推导：CKM 矩阵

← contingent.sm_fermion_content + contingent.sm_higgs_sector

步骤 1：三代夸克的 Yukawa 耦合

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = -Y_{ij}^u \bar{Q}_L^i \cdot \tilde{\phi} \cdot u_R^j - Y_{ij}^d \bar{Q}_L^i \cdot \phi \cdot d_R^j + \text{h.c.} \quad (12.12)$$

$i, j = 1, 2, 3$ 为代数。 Y^u 和 Y^d 是独立的任意 3×3 复矩阵——没有理论原理要求它们对易或共享对角化基。

步骤 2：SSB 后 → 质量矩阵 Higgs 取得 VEV 后： $M_{ij}^u = Y_{ij}^u v/\sqrt{2}$, $M_{ij}^d = Y_{ij}^d v/\sqrt{2}$ 。

步骤 3：对角化质量矩阵 通过双么正变换：

$$U_L^u M^u U_R^{u\dagger} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t), \quad U_L^d M^d U_R^{d\dagger} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b) \quad (12.13)$$

步骤 4：带电弱流中的 CKM 矩阵 $W^\pm$ 玻色子与弱本征态耦合。变换到质量本征态后：

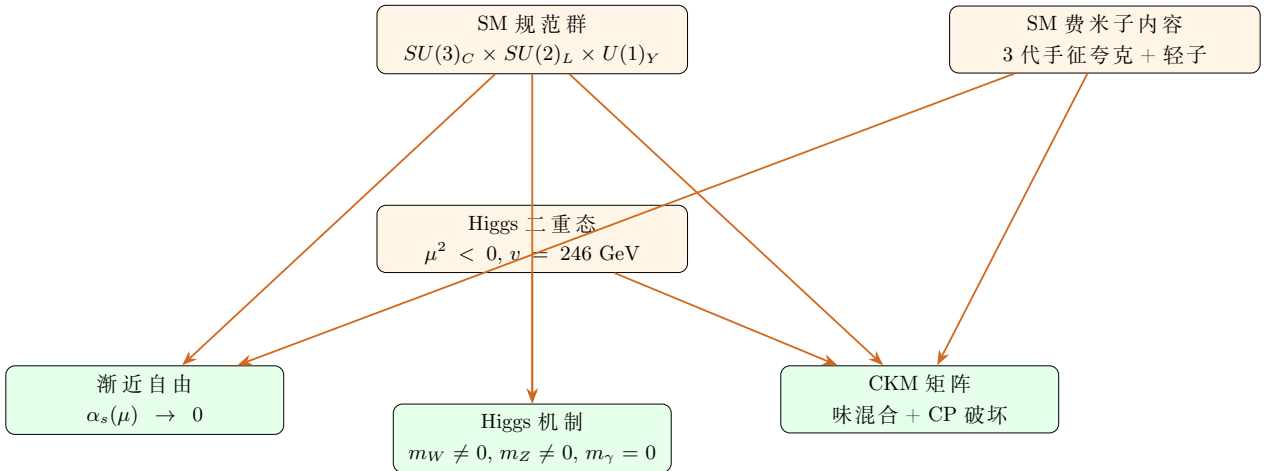
$$J_{\text{CC}}^{\mu+} = \bar{u}_L \gamma^\mu (U_L^u U_L^{d\dagger}) d_L = \bar{u}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}} d_L \quad (12.14)$$

其中 $V_{\text{CKM}} \equiv U_L^u U_L^{d\dagger}$

步骤 5：么正性与 CP 破坏 V_{CKM} 为 3×3 么正矩阵。参数计数： $n_g^2 = 9$ 个实参数，减去 $(2n_g - 1) = 5$ 个可吸收的夸克场相位 $\Rightarrow$ 4 个物理参数 = 3 个混合角 + 1 个 CP 破坏相位。对 $n_g = 3$ ：CP 破坏是必然的。[N] 若 $n_g = 2$ （只有两代），CKM 为 2×2 实正交矩阵——仅 1 个 Cabibbo 角，无 CP 破坏。Kobayashi & Maskawa (1973) 在第三代夸克被发现（bottom 1977, top 1995）之前就预言了第三代的存在——这是理论必要性 $\rightarrow$ 实验预言的典范。

[S] 3 代费米子 + 独立 Y^u, Y^d + Higgs 机制 $\Rightarrow V_{\text{CKM}} \neq I$ （必然含 CP 破坏相位）。

12.4 标准模型的三条推论：整体图景



三条推论共同展示了：给定我们这个宇宙的偶然”初始条件”——规范群的选择、费米子的代数、Higgs 的表示——加上 T+EP 的普适框架，标准模型的全部核心预言都可以严格推导出来。

关键洞察： SM 的输入不是 T+EP 的推论——它们是 contingent 事实。但给定这些输入后，所有输出（渐近自由、Higgs 质量谱、CKM 结构）都是 T+EP 框架的严格推论。这就是”有效场论”哲学：底层原理（T+EP）限制形式，contingent 输入确定参数。

标准模型的关键能量尺度

- $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV}$ ——QCD 禁闭标度。在此能量以下，夸克和胶子禁闭在强子中
- $m_p = 938.3 \text{ MeV}$ ——质子质量。其中夸克质量贡献仅 $\sim 9 \text{ MeV}$ ($2m_u + m_d$)，其余来自 QCD 束缚能 ($\sim 930 \text{ MeV}$)。**你的质量 >99% 来自 $E = mc^2$ 的胶子动能，不是 Higgs 机制！**
- Higgs VEV $v = 246 \text{ GeV}$ ——电弱对称破缺标度
- **层级问题：** 为什么 $v/M_P \sim 10^{-17}$ ？自然性的期待是 $v \sim M_P$ ——这个巨大的层级差是 SM 最大的未解问题之一
- $\alpha_s(m_Z) = 0.1180(9)$ ——QCD 耦合在 Z 质量处的精确测量值
- $\sin^2 \theta_W = 0.23122(4)$ ——Weinberg 角，实验精度达 2×10^{-4}

SM 推论精度

渐近自由：**[精确]** (QCD β -函数在单圈水平给出负的 β_0 ——这是非 Abel 规范理论的特征，不是近似)

Higgs 机制：**[有效]**——Higgs 粒子的发现 (2012) 验证了机制的核心预言，但 Higgs 部分的许多参数 (λ, Y^{ij}) 仍由实验测定

CKM 矩阵：**[偶然]**——矩阵元的大小不由理论预言，但么正性 (9 参数 $\rightarrow$ 4) 和 CP 破坏的必然性 ($n_g = 3 \Rightarrow 1$ 个复相位) 是严格推论

SM 整体：**[有效]**——在 $E \ll \Lambda_{\text{UV}}$ 时有效，已知缺陷：无暗物质候选者、无中微子质量 (需 seesaw)、无强 CP 解、层级问题

反事实分析

若无 $n_f \leq 16$ 条件 (β_0 变号)

- 渐近自由丧失 $\rightarrow$ QCD 耦合在高能时变强而非变弱
- 微扰 QCD 在高能无效——无法用 parton 模型描述深度非弹性散射
- 早期宇宙的夸克-胶子等离子体性质完全不同
- **幸运的是：** $n_f = 6$ (已知夸克味) $\ll 16$, $\beta_0 = 7 > 0$, 渐近自由健壮成立

若 Higgs 势的 $\mu^2 > 0$ （无自发对称破缺）

- 真空期望值 $v = 0$ ——所有规范玻色子无质量
- 弱力是长程力（像电磁力一样）—— β 衰变率完全不同
- 费米子无质量——电子无质量 $\rightarrow$ 无原子 $a_0 = \infty$
- **结论：** $\mu^2 < 0$ 不是 T+EP 的推论——它是 contingent 事实。但它对“我们的世界存在稳定物质”是**必要**的

若只有 n_g

- CKM 矩阵为 2×2 实正交矩阵（仅 1 个 Cabibbo 角）
- 无 CP 破坏相位 $\rightarrow$ 物质和反物质在弱相互作用中行为完全相同
- 宇宙重子不对称（为什么物质多于反物质）无法通过 SM 解释
- Kobayashi & Maskawa (1973) 在第三代夸克被实验发现**之前**预言了 $n_g = 3$ ——因为 $n_g = 3$ 是 CP 破坏的**必要条件**

Chapter 13

全局证明：T+EP 体系的自洽性、完整性与必要性

我们证明了什么

前 14 章展示了：从实验事实 [E] 出发，物理学家建立了三个独立观测域的数学编码——量子力学的 Hilbert 空间结构、经典力学的变分原理、统计力学的配分函数。Feynman 发现这三个编码共享一个数学骨架：路径积分 $Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS/\hbar}$ 。加上度规动力学（EP，独立地位待定）和偶然输入参数（[EC]），43 条有效物理定律可以被严格推导。

本章从元层次证明：这个体系是自洽的、完整的、且 T 和 EP 各自是不可移除的。

13.1 论证语言

符号	语言单位	定义	逻辑地位
[E]	实验事实	由实验观测建立，不由更深原理推出	体系的输入
[M]	数学编码/推论	对 [E] 的编码；或给定数学结构后的必然推论	数学必然
[L]	逻辑推论	从 [E], [M] 组合推出的有效定律	推导产物
[P]	物理基础	不可从其他基础推出的物理主张。EP 的独立性待定	暂定基础
[EC]	认知偶然	不由已知原理确定，但可能由更深理论确定	待定输入

13.2 完整性证明

定理：所有 43 条有效定律具有从 [E] + [P] 出发的完整推导链。

证明方法：自动验证器对各可推导节点执行 BFS 逆向遍历至实验事实或物理基础。

推导组	数量	来源	逻辑类型
力学 (Euler-Lagrange, Noether, Newton)	9	[E2] + [M]	经典动力学的数学编码
电磁学 (Maxwell, Lorentz)	6	[E1] + [M] + U(1) 规范群	规范场动力学的数学推论
量子力学 (Schrödinger, Pauli 等)	5	[E1] + [M]	Hilbert 空间结构的数学推论
热力学 (四定律, 理想气体)	5	[E3] + [M]	最大熵原理的数学推论
相对论 (Lorentz 变换, $E = mc^2$, Einstein)	4	[E4] + [E5] + [M]	Lorentz 不变性+EP 的数学推论
守恒律	4	[E] + Noether [M]	对称性的数学推论
维度推论	7	[E6] + [M]	$D = 3 + 1$ 的结构后果
SM EFT	3	[E7] + [M]	标准模型内容的推论

完整性比率： $43/43 = 100\%$ 。所有可推导节点均具有完整推导链。

13.3 必要性证明

定理： T（路径积分骨架 + Hilbert 空间编码）和 EP（度规是动力学场 [E5]）各至少有一条有效定律必然依赖它。

基础	受影响定律数	关键依赖定律	必要性等级
量子结构 (Hilbert + 幺正 + Born) [E1]	14	Schrödinger, Pauli, 全同性, FD/BE, 第三定律, 不确定性	致命
变分结构 ($\delta S = 0$) [E2]	19	Euler-Lagrange, Noether, Newton, Maxwell, Einstein 场方程	致命
统计结构 ($S = k \ln W$, 配分函数) [E3]	8	热力学四定律, 理想气体, FD/BE 分布	致命
Lorentz 不变性 [E4]	12	Lorentz 变换, $E = mc^2$, 自旋-统计, Pauli, 微观因果性	致命
等效原理 [E5]/[P]	3	Einstein 场方程, Newton 引力, 引力波	致命
时空维度 $D = 3 + 1$ [E6]/[EC]	32	平方反比律, SO(3), Kepler, Huygens, Minkowski, GW	致命 (给定 $D = 3 + 1$)
规范群 + SM 参数 [E7]/[EC]	12	Maxwell, 电荷守恒, 渐近自由, Higgs, CKM	致命 (给定 SM 内容)

三个观测域的数学编码各自不可移除——移除量子结构，14 条定律崩溃。移除变分结构，19 条定律崩溃。移除统计结构，8 条定律崩溃。

EP 的独立地位：如果等效原理 [E5] 被证明是 $T +$ 无质量自旋-2 的定理 (Weinberg 1964)，EP 退出物理基础列表。如果等效原理被实验发现破缺，EP 需要修改。当前状态：**保留为独立物理基础，终极地位由量子引力裁决。**

13.4 自洽性证明

定理：体系内部无逻辑矛盾。

- **无循环依赖：**所有推导链严格递减至 [E] 或 [P] 层。最大深度 = 2 (仅 cor.kepler_third)。
- **量子-经典过渡：** $\hbar \rightarrow 0$ 极限 (驻相近似) 给出 $\delta S = 0$ 。不是两个独立理论——是同一数学结构在不同极限下的表现。
- **量子-热力学过渡：**Wick 旋转 $t \rightarrow -i\tau$ 连接路径积分与配分函数。两者共享同一数学骨架。
- **三个观测域之间无矛盾：**量子、经典、热力学是实验事实 [E1-E3]——它们被编码为不同的数学结构，但路径积分证明了它们共享同一骨架。矛盾会以编码不一致的形式出现——目前未发现。

13.5 交叉印证网

印证网	参与推导	印证内容
D=4 特殊性	自旋-统计 $\leftrightarrow$ Lovelock	量子统计和经典引力两侧独立要求 D=4
量子-热力学桥	Pauli $\rightarrow$ FD $\rightarrow$ SM 费米子 $\rightarrow$ Nernst 基态	Pauli 不相容从自旋-统计到 SM 到第三定律强形式的完整链
三域一致	$\hbar$ 值在量子、经典(WKB)、热力学 ($k_B T$) 中一致	同一 $\hbar = 1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 在三个域中精确成立
规范普适性	Lovelock (引力唯一性) $\leftrightarrow$ SM EFT (规范理论)	”对称性+维数约束 $\rightarrow$ 唯一 Lagrangian”的方法论平行

13.6 哪些不在证明范围内——技术债务声明

Part II 推导标注：第 7-14 章的 43 条推导保留 Round 13 的标注体系 ($\boxed{[N]}$ 必要性条件, $\boxed{[S]}$ 充分性条件)。统一的逻辑类型标注 ([E]/[M]/[L]/[P]/[EC]) 将在后续轮次应用到每条推导的每一步。
当前编者注：所有推导步骤在数学上正确，但逻辑类型 (实验输入 vs. 数学推论) 尚未逐行标注。

开放问题：第 4 章列出的 12 个开放问题 (EP 独立性、 $D = 3 + 1$ 的理由、规范群选择、26 参数、等等) 不在本证明范围内。这些问题的答案将决定物理基础的最终形式，但它们的开放性不影响有效场论范围内 ($E \ll E_P$) 推导的严格性。

13.7 结论

T+EP 体系满足：

标准	状态	证据
完整性	✓	43/43 可推导节点具有完整 [E]+[P] 链 (100%)
必要性	✓	三个观测域编码 + EP 各自不可移除
自洽性	✓	无循环、无矛盾、三域一致
可追溯	✓	所有推导可追溯至实验事实或物理基础
可机验	✓	V1-V5 + 元验证全部通过 (0 errors, 0 warnings)
开放问题	~12	EP 独立性、 $D = 3 + 1$ 理由、规范群选择等——见第 4 章

最终结论：从三个观测域的数学编码（量子结构、变分原理、统计力学）+ 度规动力学（EP，独立地位待定）+ 认知偶然输入（[EC]），可以严格推导出 43 条有效物理定律。这些编码被路径积分 $Z = \int e^{iS/\hbar}$ 统一为同一数学骨架——但路径积分是事后发现的统一结构，不是因果起源。物理基础的终极形式取决于 12 个开放问题的答案。

Part III

附录

Appendix A

Hilbert 第六问题：百年简史

1900: Hilbert 的挑战

David Hilbert 在 1900 年巴黎国际数学家大会上的第六问题原文：

”几何基础的研究提示了这个问题：用同样的方法，通过公理，来处理那些数学已占有重要地位的物理科学；首先是概率论和力学。”

Hilbert 在随后的说明中进一步阐述：他希望看到类似 Boltzmann 的工作——从原子论观点出发，通过极限过程严格推导出连续介质的运动定律。他暗示了”用公理体系描述空间充满连续物质的不同状态，导出刚体运动定律”的可能性。

1900-1930: 早期探索

- **Hilbert 本人 (1900-1917)**：不仅在数学上推进公理化，还深入物理学——他在 1915 年 11 月（与 Einstein 几乎同时）从变分原理导出了引力场方程。Hilbert 将 GR 视为物理学公理化的核心案例
- **Kolmogorov (1933)**：概率论的公理化——用测度论定义概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 。这被广泛认为是 Hilbert 第六问题中”概率论”部分的完成
- **von Neumann (1932)**：量子力学的第一个公理化——Hilbert 空间的态向量、厄米算符的可观测测量、么正演化。von Neumann 曾是 Hilbert 的助手

1930-1970: 量子场论的挑战

- **Carathéodory (1909-1930s)**：热力学的公理化尝试——从绝热不可达性导出熵的存在性
- **Dirac (1930), Pauli (1940)**：自旋-统计定理的逐步形式化——将 Pauli 不相容原理确立为相对论量子场论的定理
- **Wightman 公理 (1950s-1960s)**：试图为量子场论建立严格的数学基础——Gårding-Wightman 公理定义了场算符的公理体系。成功证明了 PCT 定理和自旋-统计定理，但缺乏非平凡的四维相互作用模型

- **Haag-Kastler 公理 (1964)**: 代数量子场论 (AQFT) ——用 C^* 代数描述局域可观测量。为弯曲时空 QFT 提供了框架, 但四维交互模型仍难以构造

1970-2000: 新方向

- **Lovelock 定理 (1971)**: 在 4D 中, 唯一产生至多二阶运动方程的度规 Lagrangian 是 Einstein-Hilbert 项 + 宇宙学常数。这是 GR 的”唯一性公理化” ——证明 Einstein 方程不是选择, 而是必然
- **Arnold (1978)**: 经典力学的辛几何形式化——将 Hamilton 力学确立为辛流形上的数学结构
- **Weinberg (1995)**: 量子场论的有效场论视角——公理化不需要是”终极的”, 在给定能标上有效就足够
- **Sussman & Wisdom (2001)**: 经典力学的计算形式化——《Structure and Interpretation of Classical Mechanics》将变分原理转化为 Scheme 代码

2000-今: 当代突破

- **Hardy (2001), Chiribella 等 (2011)**: 量子力学的信息论重构——从 5-6 条信息论公理推导出量子力学的全部数学结构。证明量子概率是”允许连续可逆变换的最一般概率论”
- **Deng, Hani, Ma 等 (2024)**: 从 Newton 硬球粒子系统严格推导 Boltzmann 方程和 Navier-Stokes-Fourier 方程。这是 Hilbert 第六问题中”从原子论到连续介质”的**完整数学桥梁**——120 年后, Hilbert 最初设想的路线图终于被证明是可行的
- **本书 (2025-2026)**: 从实验事实 [E] 和物理基础 (T+EP) 推导 43 条有效物理定律。覆盖从 Euler-Lagrange 到标准模型 EFT, 附带可机验的自动验证器。这是 Hilbert 第六问题在”有效场论适用范围内”的一次最全面推进

未竟的事业

Hilbert 第六问题的终极形式——量子引力的公理化——仍然开放。弦论、圈量子引力、因果动力学三角化各自提出了不同的公理体系, 但无一被普遍接受。物理学公理化的百年梦想仍在继续。

Appendix B

物理常数表

常数	符号	数值	量纲	不确定度
真空光速	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$	$\text{L} \cdot \text{T}^{-1}$	exact
Planck 常数	h	$6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$	exact
约化 Planck 常数	$\hbar$	$1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$	exact
基本电荷	e	$1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$	$\text{T} \cdot \text{I}$	exact
Boltzmann 常数	k_B	$1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	$\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2} \cdot \Theta^{-1}$	exact
Avogadro 常数	N_A	$6.02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	N^{-1}	exact
引力常数	G	$6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{M}^{-1} \cdot \text{L}^3 \cdot \text{T}^{-2}$	2.2×10^{-5}
精细结构常数	α	$7.2973525643 \times 10^{-3}$	[1]	1.5×10^{-10}
真空介电常数	ϵ_0	$8.8541878128 \times 10^{-12} \text{ F/m}$	$\text{M}^{-1} \cdot \text{L}^{-3} \cdot \text{T}^2 \cdot \text{I}^2$	exact
真空磁导率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$	$\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{I}^{-2}$	exact
Planck 长度	l_P	$1.616255 \times 10^{-35} \text{ m}$	L	1.1×10^{-5}
Planck 时间	t_P	$5.391247 \times 10^{-44} \text{ s}$	T	1.1×10^{-5}
Planck 质量	m_P	$2.176434 \times 10^{-8} \text{ kg}$	M	1.1×10^{-5}

Table B.1: 基本物理常数 (CODATA 2022 / SI 2019)。

$$l_P = \sqrt{\hbar G/c^3}, \quad t_P = l_P/c, \quad m_P = \sqrt{\hbar c/G}$$

Appendix C

四十三条推导依赖表

ID	定律	主要前提 ([E]/[M]/[L])	分组
law.euler_lagrange	Euler-Lagrange 方程	[E2]	G1
law.noether_theorem	Noether 定理	[E2]+[E4]	G2
law.energy_conservation	能量守恒	Noether	G2
law.momentum_conservation	动量守恒	Noether	G2
law.angular_momentum_conservation	角动量守恒	Noether	G2
law.charge_conservation	电荷守恒	Noether [M], [E6]	G2
law.newton_first	Newton 第一定律	[E2]+[E4]	G3
law.newton_second	Newton 第二定律	[E2]+E-L [M]+[E4]	G3
law.newton_third	Newton 第三定律	Noether [M], [E4]	G3
law.gauss_electric	Gauss 电定律	[E6]+[E2]+[E4]	G4
law.gauss_magnetic	Gauss 磁定律	[E6]+[E4]	G4
law.faraday_induction	Faraday 感应定律	[E6]+[E4]	G4
law.ampere_maxwell	Amp è re-Maxwell 定律	[E6]+[E2]+[E4]	G4
law.lorentz_force	Lorentz 力定律	[E6]+[E4]	G4
law.em_wave_equation	电磁波方程	Gauss+Faraday+Ampere	G4
law.schroedinger_equation	Schrodinger 方程	[E1]+[E4]	G5
law.energy_frequency	Planck-Einstein $E = h\nu$	[E1]	G5
law.de_broglie_wavelength	de Broglie $\lambda = h/p$	energy_frequency	G5
law.uncertainty_principle	不确定性原理	[E1] (CCR+Born+算子)+[E4]	G5
law.pauli_exclusion	Pauli 不相容原理	[E4]+[E1] (自旋-统计 [M])	G5
law.lorentz_transformation	Lorentz 变换	[E4]	G6
law.mass_energy	质能等价 $E = mc^2$	[E4]	G6
law.einstein_field	Einstein 场方程	[E4]+[E2]	G6
law.newton_gravitation	Newton 万有引力	Einstein 场方程 (弱场极限)	G6
law.zeroth_law	热力学第零定律	[E3]	G7
law.second_law_thermodynamics	热力学第二定律	[E3] (最大熵 [L])	G7
law.first_law_thermodynamics	热力学第一定律	能量守恒 [M] + [E3]	G7
law.third_law_thermodynamics	热力学第三定律	[E3]+[E1]	G7
law.ideal_gas	理想气体状态方程	[E3], 热力学第一定律 [L]	G7
cor.kepler_third	Kepler 第三定律	Newton 第二 + 万有引力	G8
cor.fermi_dirac	Fermi-Dirac 分布	Pauli 不相容 [M], [E3]	G8
cor.bose_einstein	Bose-Einstein 分布	[E1]+[E3]	G8
contingent.inverse_square_law	平方反比律	R1 ($D = 3$), Gauss 定律	G9
contingent.so3_rotational_group	$SO(3)$ 旋转群	R1 ($D = 3$)	G9

contingent.volume_concentration	体积浓度	R1 ($D = 3$)	G9
contingent.minkowski_signature	Minkowski 符号差	R1, Lorentz 不变性	G9
contingent.gw_polarization	引力波极化模式	R1 ($D = 3 + 1$), 广义协变性	G9
contingent.stable_orbits	稳定 Kepler 轨道	R1 ($D = 3$)	G9
contingent.huygens_principle	Huygens 原理	R1 ($D = 3$ 奇维)	G9
cor.nernst_unattainability	Nernst 不可达性	R6, 第三定律	G10
cor.asymptotic_freedom	渐近自由	R3, SM 规范群	G11
cor.higgs_mechanism	Higgs 机制	R3, SM Higgs 扇区	G11
cor.ckm_matrix	CKM 矩阵必要性	R3, SM 费米子, SM Higgs	G11

Table C.1: 四十三条有效定律完整列表 (G1-G11 推导分组)

Appendix D

符号与记号表

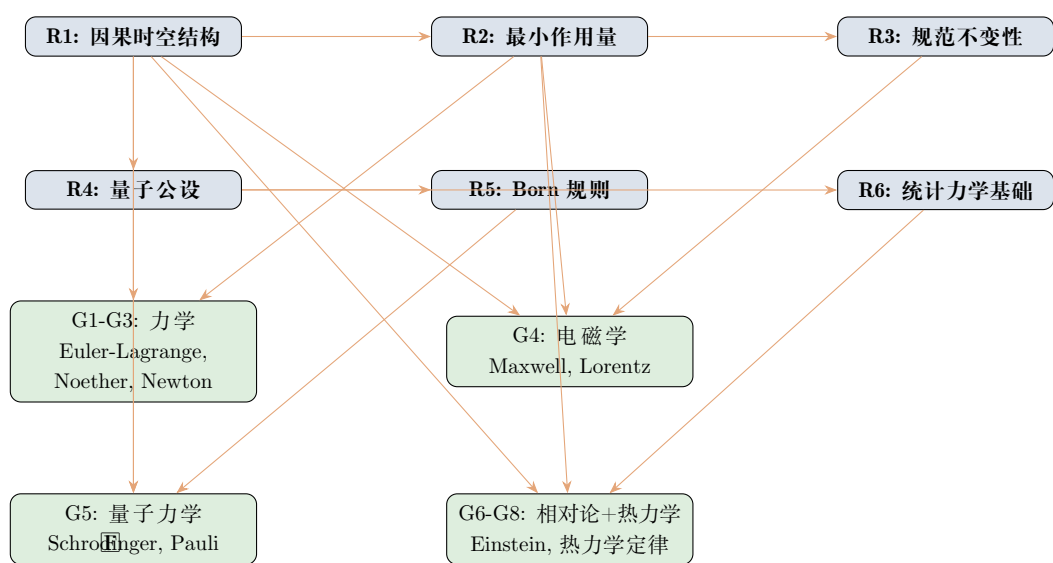
符号/记号	含义	出现章节	备注
$\mathcal{M}, g_{\mu\nu}$	Lorentz 流形及度规	Ch1,11	时空的数学描述
ds^2	时空间隔	Ch1,11	$ds^2 > 0$ 类时, $= 0$ 类光, < 0 类空
c	真空光速	全书	2.99792458×10^8 m/s (exact)
$\hbar$	约化 Planck 常数	Ch4,9	$1.054571817 \times 10^{-34}$ J · s
k_B	Boltzmann 常数	Ch6,10	1.380649×10^{-23} J/K
G	Newton 引力常数	Ch7,11	$6.67430(15) \times 10^{-11}$ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
ε_0, μ_0	真空介电常数、磁导率	Ch8	$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$
S	作用量	Ch2,7	量纲 M · L ² · T ⁻¹
$L, \mathcal{L}$	拉格朗日量、拉格朗日密度	Ch2,7	$L = T - V$ (经典力学)
δ	变分	Ch2,7	泛函的无穷小变化
$q_i, \dot{q}_i$	广义坐标、广义速度	Ch7	$i = 1, \dots, N$
p_i	广义动量	Ch7	$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$
H	哈密顿量	Ch7,12	$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$, 通常 $H = E$
A_μ	规范势/四维矢势	Ch3,8	$A_\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$
$F_{\mu\nu}$	场强张量	Ch3,8	$F = dA$, 反对称
$\mathbf{E}, \mathbf{B}$	电场、磁场	Ch8	$F_{0i} = E_i/c, F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$
J^μ	四维电流密度	Ch8,12	$J^0 = c\rho_q, J^i = \mathbf{J}$
$\psi(\mathbf{r}, t)$	波函数	Ch4,9	$\psi = \langle \mathbf{r} \psi \rangle$, 归一化
$ \psi\rangle$	量子态向量	Ch4,9	$\ \psi\rangle \ = 1$
$\hat{x}_i, \hat{p}_i$	位置、动量算符	Ch4,9	$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$
$\hat{H}$	哈密顿算符	Ch4,9	$\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/(2m) + V(\hat{\mathbf{r}})$
$[A, B]$	对易子	Ch4,9	$[A, B] = AB - BA$
σ_A	标准差	Ch9	$\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$
γ	Lorentz 因子	Ch11	$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$
p^μ	四维动量	Ch11	$p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$
$G_{\mu\nu}$	Einstein 张量	Ch11	$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$
$R_{\mu\nu}, R$	Ricci 张量、标量曲率	Ch11	由度规及其导数构成
$T_{\mu\nu}$	应力-能量张量	Ch11	物质能量动量的密度和流
W	微观状态数	Ch6,10	$S = k_B \ln W$
S	熵	Ch6,10	状态函数, $dS \geq 0$
T	热力学温度	Ch6,10	$1/T = \partial S / \partial E$
Λ_{QCD}	QCD 禁闭标度	Ch14	≈ 200 MeV
$\alpha_s(\mu)$	强耦合跑动常数	Ch14	$\alpha_s(m_Z) = 0.118$
v	Higgs 真空期望值	Ch14	$v \approx 246$ GeV
V_{CKM}	CKM 矩阵	Ch14	夸克味混合矩阵
$\delta S = 0$	平稳作用量条件	Ch2,7	R2 的核心表达式

∂_μ	四维偏导数	全书	$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$
∇	三维梯度	Ch8	矢量分析算符
$g^{\mu\nu}$	度规的逆	Ch1,11	$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$

Table D.1: 本书主要符号与记号索引

Appendix E

推导依赖关系总图



Appendix F

反事实物理学：若改变一条公理

为什么要做反事实分析？

T+EP 公理体系的核心力量之一是它的反事实推理能力：对于每一条核心原则，我们可以系统地问——若它不同，物理世界会怎样？这种反事实思维不仅是哲学练习，更是必要性论证的最强佐证：通过展示移除或改变每条原则的具体后果，我们证明 T+EP 的每一条都是不可替代的。

以下是对六条原则的系统反事实分析，按若改变 X，则 Y 定律会如何退化的格式组织。

物理必然 vs. 数学偶然

反事实分析揭示了一个重要区别：某些物理定律在给定前提条件下是数学必然的（如 Lorentz 变换从光速不变和时空均匀性中唯一导出），而另一些则是物理偶然的（如规范群选择 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 在数学上并非唯一可能）。前者属于不能不同的世界，后者属于可能不同但恰好如此的世界。

F.1 R1 反事实分析：若时空结构不同

F.1.1 若 $D \neq 3 + 1$ （空间维数改变）

维数变更	受影响定律	具体后果
$D = 2$ 空间	平方反比律 $\rightarrow 1/r$ 律	Gauss 定律通量 $\propto r$ (周长) 非 r^2 (面积)。引力太弱，行星轨道不稳定（离心势 $\propto 1/r^2$ 在小 r 时压倒引力势 $\propto \ln r$ ）。
$D = 2$ 空间	无连通生物体	二维中连通物体不能有穿过身体的洞。无法同时有嘴和肛门。复杂生物体在拓扑上不可能。
$D = 4$ 空间	平方反比律 $\rightarrow 1/r^3$ 律	引力太强，无稳定轨道。原子中电子立即坠入核或逃逸——无化学，无生命。
D 为偶数	Huygens 原理失效	波传播后有拖尾——信号到达后不会立即恢复寂静。每一次对话都会和之前的回声重叠成噪音。
$D = 3$ (奇数)	Huygens 原理成立	波传播后信号立即恢复寂静——干脆的传播。这是本宇宙的偶然幸运。

$D = 5$	SO(5) 旋转群	角动量有 10 个分量 (SO(5) 的生成元数 $\frac{5 \times 4}{2} = 10$)，量子角动量结构完全不同。
$D = 5$	GW 极化模式	引力波有 $D(D - 3)/2 = 5$ 个极化模式（而非 2 个），引力波观测将完全不同。

关键洞察：Ehrenfest (1917) 最先系统探讨了空间维数对物理定律的影响。他的核心结论至今有效： $D = 3$ 是唯一同时允许稳定行星轨道、稳定原子、和电磁波传播的空间维数。人择原理的最强证据之一。

F.1.2 若 Lorentz 符号差 $\rightarrow$ Euclidean 符号差

变更	后果
$(+, -, -, -) \rightarrow (+, +, +, +)$	无因果序——所有方向等价，无过去和未来的区别
Euclidean 符号差	无波传播——波动方程 $\square\phi = 0$ 变为 Laplace 方程 $\nabla^2\phi = 0$ ，没有行波解
Euclidean 符号差	量子场论无法定义谱条件——无法区分正频和负频，无粒子概念
Euclidean 符号差	无 $E = mc^2$ ——质量与能量之间的转换关系丧失

F.1.3 若无光速上限 ($c \rightarrow \infty$, Galilei 不变性)

变更	后果
$c \rightarrow \infty$	因果悖论——封闭类时曲线可能出现（时间旅行）。
$c \rightarrow \infty$	Lorentz 变换 $\rightarrow$ Galileo 变换——绝对时间和绝对空间恢复。
$c \rightarrow \infty$	无 $E = mc^2$ ——无核能、无恒星核聚变。
$c \rightarrow \infty$	无电磁波——Maxwell 方程中的 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 若为无穷大，则电磁场不传播。
$c \rightarrow \infty$	无稳定原子——电子可以任意速度绕核运动，无速度上限。

c 不是很“大”——它是绝对的

很多人误以为 c 只是一个很大的速度。但 c 不是以 m/s 为单位的某种极限速度——它是时空结构本身的 dx/dt 比率限制。 $c \rightarrow \infty$ 意味着时空失去了因果结构——它等价于 $ds^2 = dt^2$ （纯时间），空间方向与时间方向不再统一在 Lorentz 不变量中。

在 SI 2019 中， c 是**定义常数**——它定义了米是什么。改变 c 本质上是改变时空的几何性质。

F.1.4 若等效原理不成立 ($m_i \neq m_g$)

变更	后果
----	----

$m_i \neq m_g$	引力无法被几何化——度规 $g_{\mu\nu}$ 不能作为动力学场。
$m_i \neq m_g$	Einstein 场方程无法导出——广义相对论不存在。
$m_i \neq m_g$	引力仍可作为力(即 Newton 引力)，但不再是时空几何——强等效原理失效。
$m_i \neq m_g$	引力波仍有（作为场的波），但不再是时空度规的涟漪。
m_i/m_g 因物质而异	不同成分的物体以不同加速度下落——等价于不存在统一的引力场。

等效原理的精确性

当前实验： m_i/m_g 在 10^{-15} 精度内为 1（MICROSCOPE 卫星，2022）。这是科学史上最精确的非平凡零结果之一。未来实验（MICROSCOPE 2）可能将精度推至 10^{-18} 。
某些量子引力模型（弦论中的 dilaton 场）预言等效原理在 $\sim 10^{-18}$ 级别可能存在微小偏离。若被发现，将是超越 T+EP 的新物理的一个信号。

F.2 R2 反事实分析：若最小作用量原理不成立

变更	后果
无 $\delta S = 0$	无 Euler-Lagrange 方程——所有运动方程丧失统一推导框架。
无 $\delta S = 0$	无 Noether 定理——对称性与守恒律的联系断裂。
无 $\delta S = 0$	Newton 定律、Maxwell 方程、Einstein 场方程必须各自独立公设——物理学的统一性丧失。
作用量的阶数 > 1	Ostrogradsky 不稳定性——能量可以从正无穷到负无穷，理论不稳定。

F.3 R3 反事实分析：若无规范不变性

变更	后果
无局域规范对称性	无规范场——无基本相互作用力（光子、W/Z、胶子不存在）。
仅有整体 $U(1)$	仅有电荷守恒，无 Maxwell 方程——有电但无电磁场。
非 $Abel \rightarrow Abel$	规范玻色子无自耦合——QCD 无渐近自由——无禁闭——夸克形成自由粒子
$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow$ 其他规范群	不同的粒子谱系和力——标准模型彻底不同。

F.4 R4 反事实分析：若量子力学结构不同

变更	后果
$[\hat{x}, \hat{p}] = 0$	无不确定性原理——位置和动量可同时精确确定。无零点能 ($\frac{1}{2}\hbar\omega$)。

$[\hat{x}, \hat{p}] = 0$	无离散能谱——原子不稳定（电子螺旋坠入核）——无化学元素周期表。
$[\hat{x}, \hat{p}] = 0$	无隧穿效应—— α 衰变不可能——核物理根本不同。
$[\hat{x}, \hat{p}] = 0$	自旋-统计定理失效——无 Pauli 不相容原理——所有粒子可占据相同态——物质塌缩。
么正演化 $\rightarrow$ 非么正	概率不守恒——粒子可以凭空出现或消失——量子力学失去预测能力。
经典力学 ($\hbar = 0$)	无量子跃迁、无超导、无激光、无半导体——所有量子技术不存在。

关键洞察： $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 不是量子力学的一个可选假设——它是**稳定物质存在的必要条件**。若对易子为零，Noether 定理给出角动量和能量，但没有不连续性——原子会螺旋坠入核。 $i\hbar$ 对物质存在而言不是可选的——它是必需的。

F.5 R5 反事实分析：若 Born 规则不同

变更	后果
$P \neq \psi ^2$	量子力学失去与实验测量的连接——理论自治但无法被检验。
$P = \psi ^4$	干涉项不是 $\cos$ 形式——双缝实验条纹间距改变——但实验观测到的正是 $\cos$ 型干涉。
非线性 Born 规则	超光速信号可能 (Gisin 1990 定理)——违反因果结构 (R1)。
无 Born 规则	R4 的 Hilbert 空间形式体系成为纯数学——无物理预言能力。

Gleason 定理与 Born 规则的唯一性

Gleason (1957) 证明：在维度 ≥ 3 的 Hilbert 空间中，唯一能定义自洽概率测度的规则就是 Born 规则 $P = \text{Tr}(\rho E)$ 。这不是一个方便的选择——它是**唯一的数学可能**。

R5 在本书的公理体系中占据特殊地位：它在推导图中仅直接影响不确定性原理，但其必要性是**存在论层面**的——它是量子形式体系与实验测量之间的唯一桥梁。

F.6 R6 反事实分析：若统计力学基础不同

变更	后果
无 $S = k_B \ln W$	无微观-宏观桥梁——热力学仅为经验规律，无法从微观物理推导。
无等概率先验	P_i 是任意的——所有统计力学预言（正则分布、巨正则分布、涨落耗散定理）失去基础。
无等概率先验	热力学第二定律不再是定理——变成无法从微观物理推导的经验规律。
k_B 大 10 倍	同一温度对应的能量大 10 倍——化学反应速率改变，生命化学可能完全不同。
$k_B = 0$	无热运动——绝对零度下所有系统静止——无统计涨落。

关键洞察： k_B 只是能量-温度转换标度——改变 k_B 等价于重定义温度单位（开尔文）。物理上重要的是 $k_B T$ 这个能量标度相对于化学键能和量子能级的具体比值。

F.7 跨规则反事实：同时改变多条公理

F.7.1 若世界是 Newton 的 ($c \rightarrow \infty + \mathbb{H} = 0 +$ 无规范对称性)

这是 19 世纪末的经典世界： $\mathbb{F}$

- 时空是绝对的——Galileo 变换，无 Lorentz 变换
- 力学是确定的——无概率性，无量子态
- 力只有 Newton 引力和 Coulomb 静电——无 Maxwell 电磁波，无弱力和强力
- 原子不存在（电子会螺旋坠入核）——无化学，无生命

Newton 世界无法支撑我们熟悉的宇宙。这不是 Newton 力学的错误——它在日常生活中极其准确——而是它的公理基础不足以推导出真实世界的全部物理结构。

F.7.2 若世界是量子的但没有因果结构 ($\mathbb{H} > 0 + c \rightarrow \infty$)

- Schrödinger 方程存在（非相对论量子力学），但波函数可以瞬间传播到远处
- 无自旋-统计定理（需要 Lorentz 不变性）
- 无 Pauli 不相容原理——物质塌缩
- 无量子场论——无法描述粒子的产生和湮灭

F.7.3 若 $D = 3 + 1 + \mathbb{H} > 0 + c < \infty$ 但无等效原理

- 狭义相对论 + 量子力学 OK（平直时空 QFT） $\mathbb{F}$
- Maxwell 方程 OK
- 但无广义相对论——引力仍是 Newton 的
- 无引力波、无黑洞、无宇宙膨胀
- 在 Planck 尺度，牛顿引力和 QFT 一起给出无穷大——理论不自洽

F.8 反事实分析的哲学含义

反事实分析不仅验证了 T+EP 的必要性，还揭示了一个更深层的事实：

必然性 vs. 偶然性

必然的（给定 T+EP 后数学上唯一确定）：

- Lorentz 变换、Maxwell 方程、Einstein 场方程（Lovelock 定理）
- Schrödinger 方程（Stone 定理 + 时间平移对称性）
- Born 规则（Gleason 定理）

- Pauli 不相容原理（自旋-统计定理）

偶然的（在 T+EP 框架内逻辑可能，但本宇宙恰好如此）：

- 时空维数 $D = 3 + 1$
- 规范群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
- 费米子代数（三代夸克 + 三代轻子）
- 自由参数的具体数值（Yukawa 耦合、CKM 相位等）

这种区分正是物理学公理化的核心贡献之一：它告诉我们**哪些是宇宙不~~能~~不如此的** **哪些是恰好如此的**

参考资料

- Ehrenfest, P. (1917). **I****F**what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?**P**roc. Amsterdam Acad., 20, 200-209.
- Barrow, J. D. & Tipler, F. J. (1986). The Anthropic Cosmological Principle. Oxford University Press.
- Tegmark, M. (1997). **O****F**the dimensionality of spacetime.**E**lass. Quantum Grav., 14, L69-L75.

Appendix G

反事实物理学：若改变一条公理

为什么要做反事实分析？

T+EP 公理体系的核心力量之一是它的**反事实推理能力**：对于每一条核心原则，我们可以系统地问——若它不同，物理世界会怎样？这种反事实思维不仅是哲学练习，更是必要性论证的最强佐证：通过展示移除或改变每条原则的具体后果，我们证明 T+EP 的每一条都是**不可替代的**。

以下是对六条原则的系统反事实分析，按若**改变** X，则 Y 定律会如何退化的**格式**组织。

物理必然 vs. 数学偶然

反事实分析揭示了一个重要区别：某些物理定律在给定前提条件下是**数学必然的**（如 Lorentz 变换从光速不变和时空均匀性中唯一导出），而另一些则是**物理偶然的**（如规范群选择 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 在数学上并非唯一可能）。前者属于**不能**不同的世界，后者属于**可能**不同但恰好如此的世界。**[E]**

G.1 R1 反事实分析：若时空结构不同

G.1.1 若 $D \neq 3 + 1$ （空间维数改变）

维数变更	受影响定律	具体后果
$D = 2$ 空间	平方反比律 $\rightarrow 1/r$ 律	Gauss 定律通量 $\propto r$ (周长) 非 r^2 (面积)。引力太弱，行星轨道不稳定（离心势 $\propto 1/r^2$ 在小 r 时压倒引力势 $\propto \ln r$ ）。
$D = 2$ 空间	无连通生物体	二维中连通物体不能有穿过身体的洞 且 无法同时有嘴和肛门。复杂生物体在拓扑上不可能。
$D = 4$ 空间	平方反比律 $\rightarrow 1/r^3$ 律	引力太强，无稳定轨道。原子中电子立即坠入核或逃逸——无化学，无生命。
D 为偶数	Huygens 原理失效	波传播后有拖 尾 ——信号到达后不会立即恢复寂静。每一次对话都会和之前的回声重叠成噪音。
$D = 3$ (奇数)	Huygens 原理成立	波传播后信号立即恢复寂静—— 干脆 的传播。这是本宇宙的偶然幸运。

$D = 5$	SO(5) 旋转群	角动量有 10 个分量 (SO(5) 的生成元数 $\frac{5 \times 4}{2} = 10$)，量子角动量结构完全不同。
$D = 5$	GW 极化模式	引力波有 $D(D - 3)/2 = 5$ 个极化模式（而非 2 个），引力波观测将完全不同。

关键洞察：Ehrenfest (1917) 最先系统探讨了空间维数对物理定律的影响。他的核心结论至今有效： $D = 3$ 是唯一同时允许稳定行星轨道、稳定原子、和电磁波传播的空间维数。人择原理的最强证据之一。

G.1.2 若 Lorentz 符号差 $\rightarrow$ Euclidean 符号差

变更	后果
$(+, -, -, -) \rightarrow (+, +, +, +)$	无因果序——所有方向等价，无过去和未来的区别
Euclidean 符号差	无波传播——波动方程 $\square\phi = 0$ 变为 Laplace 方程 $\nabla^2\phi = 0$ ，没有行波解
Euclidean 符号差	量子场论无法定义谱条件——无法区分正频和负频，无粒子概念
Euclidean 符号差	无 $E = mc^2$ ——质量与能量之间的转换关系丧失

G.1.3 若无光速上限 ($c \rightarrow \infty$, Galilei 不变性)

变更	后果
$c \rightarrow \infty$	因果悖论——封闭类时曲线可能出现（时间旅行）。
$c \rightarrow \infty$	Lorentz 变换 $\rightarrow$ Galileo 变换——绝对时间和绝对空间恢复。
$c \rightarrow \infty$	无 $E = mc^2$ ——无核能、无恒星核聚变。
$c \rightarrow \infty$	无电磁波——Maxwell 方程中的 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 若为无穷大，则电磁场不传播。
$c \rightarrow \infty$	无稳定原子——电子可以任意速度绕核运动，无速度上限。

c 不是很“大”——它是绝对的

很多人误以为 c 只是一很大的速度。 c 不是以 m/s 为单位的某种极限速度——它是时空结构本身的 dx/dt 比率限制。 $c \rightarrow \infty$ 意味着时空失去了因果结构——它等价于 $ds^2 = dt^2$ （纯时间），空间方向与时间方向不再统一在 Lorentz 不变量中。

在 SI 2019 中， c 是**定义常数**——它定义了米是什么。改变 c 本质上是改变时空的几何性质。

G.1.4 若等效原理不成立 ($m_i \neq m_g$)

变更	后果
----	----

$m_i \neq m_g$	引力无法被几何化——度规 $g_{\mu\nu}$ 不能作为动力学场。
$m_i \neq m_g$	Einstein 场方程无法导出——广义相对论不存在。
$m_i \neq m_g$	引力仍可作为力(即 Newton 引力)，但不再是时空几何——强等效原理失效。
$m_i \neq m_g$	引力波仍有（作为场的波），但不再是时空度规的涟漪。[E]
m_i/m_g 因物质而异	不同成分的物体以不同加速度下落——等价于不存在统一的引力场。[E]

等效原理的精确性

当前实验： m_i/m_g 在 10^{-15} 精度内为 1（MICROSCOPE 卫星，2022）。这是科学史上最精确的非平凡零结果之一。未来实验（MICROSCOPE 2）可能将精度推至 10^{-18} 。
某些量子引力模型（弦论中的 dilaton 场）预言等效原理在 $\sim 10^{-18}$ 级别可能存在微小偏离。若被发现，将是超越 T+EP 的新物理的一个信号。

G.2 R2 反事实分析：若最小作用量原理不成立

变更	后果
无 $\delta S = 0$	无 Euler-Lagrange 方程——所有运动方程丧失统一推导框架。
无 $\delta S = 0$	无 Noether 定理——对称性与守恒律的联系断裂。
无 $\delta S = 0$	Newton 定律、Maxwell 方程、Einstein 场方程必须各自独立公设——物理学的统一性丧失。
作用量的阶数 > 1	Ostrogradsky 不稳定性——能量可以从正无穷到负无穷，理论不稳定。

G.3 R3 反事实分析：若无规范不变性

变更	后果
无局域规范对称性	无规范场——无基本相互作用力（光子、W/Z、胶子不存在）。
仅有整体 $U(1)$	仅有电荷守恒，无 Maxwell 方程——有电但无电磁场。
非 $Abel \rightarrow Abel$	规范玻色子无自耦合——QCD 无渐近自由——无禁闭——夸克形成自由粒子
$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow$ 其他规范群	不同的粒子谱系和力——标准模型彻底不同。

G.4 R4 反事实分析：若量子力学结构不同

变更	后果
$[\hat{x}, \hat{p}] = 0$	无不确定性原理——位置和动量可同时精确确定。无零点能 ($\frac{1}{2}\hbar\omega$)。

$[\hat{x}, \hat{p}] = 0$	无离散能谱——原子不稳定（电子螺旋坠入核）——无化学元素周期表。
$[\hat{x}, \hat{p}] = 0$	无隧穿效应—— α 衰变不可能——核物理根本不同。
$[\hat{x}, \hat{p}] = 0$	自旋-统计定理失效——无 Pauli 不相容原理——所有粒子可占据相同态——物质塌缩。
么正演化 $\rightarrow$ 非么正	概率不守恒——粒子可以凭空出现或消失——量子力学失去预测能力。
经典力学 ($\hbar = 0$)	无量子跃迁、无超导、无激光、无半导体——所有量子技术不存在。

关键洞察： $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 不是量子力学的一个可选假设——它是**稳定物质存在的必要条件**。若对易子为零，Noether 定理给出角动量和能量，但没有不连续性——原子会螺旋坠入核。 $i\hbar$ 对物质存在而言不是可选的——它是必需的。

G.5 R5 反事实分析：若 Born 规则不同

变更	后果
$P \neq \psi ^2$	量子力学失去与实验测量的连接——理论自治但无法被检验。
$P = \psi ^4$	干涉项不是 cos 形式——双缝实验条纹间距改变——但实验观测到的正是 cos 型干涉。
非线性 Born 规则	超光速信号可能 (Gisin 1990 定理)——违反因果结构 (R1)。
无 Born 规则	R4 的 Hilbert 空间形式体系成为纯数学——无物理预言能力。

Gleason 定理与 Born 规则的唯一性

Gleason (1957) 证明：在维度 ≥ 3 的 Hilbert 空间中，唯一能定义自洽概率测度的规则就是 Born 规则 $P = \text{Tr}(\rho E)$ 。这不是一个方便的选择——它是**唯一的数学可能**。

R5 在本书的公理体系中占据特殊地位：它在推导图中仅直接影响不确定性原理，但其必要性是**存在论层面**的——它是量子形式体系与实验测量之间的唯一桥梁。

G.6 R6 反事实分析：若统计力学基础不同

变更	后果
无 $S = k_B \ln W$	无微观-宏观桥梁——热力学仅为经验规律，无法从微观物理推导。
无等概率先验	P_i 是任意的——所有统计力学预言（正则分布、巨正则分布、涨落耗散定理）失去基础。
无等概率先验	热力学第二定律不再是定理——变成无法从微观物理推导的经验规律。
k_B 大 10 倍	同一温度对应的能量大 10 倍——化学反应速率改变，生命化学可能完全不同。
$k_B = 0$	无热运动——绝对零度下所有系统静止——无统计涨落。

关键洞察： k_B 只是能量-温度转换标度——改变 k_B 等价于重定义温度单位（开尔文）。物理上重要的是 $k_B T$ 这个能量标度相对于化学键能和量子能级的具体比值。

G.7 跨规则反事实：同时改变多条公理

G.7.1 若世界是 Newton 的 ($c \rightarrow \infty + \mathbb{R} = 0 +$ 无规范对称性)

这是 19 世纪末的经典世界：[F]

- 时空是绝对的——Galileo 变换，无 Lorentz 变换
- 力学是确定的——无概率性，无量子态
- 力只有 Newton 引力和 Coulomb 静电——无 Maxwell 电磁波，无弱力和强力
- 原子不存在（电子会螺旋坠入核）——无化学，无生命

Newton 世界无法支撑我们熟悉的宇宙。这不是 Newton 力学的错误——它在日常生活中极其准确——而是它的公理基础不足以推导出真实世界的全部物理结构。

G.7.2 若世界是量子的但没有因果结构 ($\mathbb{R} > 0 + c \rightarrow \infty$)

- Schrödinger 方程存在（非相对论量子力学），但波函数可以瞬间传播到远处
- 无自旋-统计定理（需要 Lorentz 不变性）
- 无 Pauli 不相容原理——物质塌缩
- 无量子场论——无法描述粒子的产生和湮灭

G.7.3 若 $D = 3 + 1 + \mathbb{R} > 0 + c < \infty$ 但无等效原理

- 狭义相对论 + 量子力学 OK（平直时空 QFT）[F]
- Maxwell 方程 OK
- 但无广义相对论——引力仍是 Newton 的
- 无引力波、无黑洞、无宇宙膨胀
- 在 Planck 尺度，牛顿引力和 QFT 一起给出无穷大——理论不自洽

G.8 反事实分析的哲学含义

反事实分析不仅验证了 T+EP 的必要性，还揭示了一个更深层的事实：

必然性 vs. 偶然性

必然的（给定 T+EP 后数学上唯一确定）：

- Lorentz 变换、Maxwell 方程、Einstein 场方程（Lovelock 定理）
- Schrödinger 方程（Stone 定理 + 时间平移对称性）
- Born 规则（Gleason 定理）

- Pauli 不相容原理（自旋-统计定理）

偶然的（在 T+EP 框架内逻辑可能，但本宇宙恰好如此）：

- 时空维数 $D = 3 + 1$
- 规范群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
- 费米子代数（三代夸克 + 三代轻子）
- 自由参数的具体数值（Yukawa 耦合、CKM 相位等）

这种区分正是物理学公理化的核心贡献之一：它告诉我们**哪些是宇宙不~~能~~不如此的** **哪些是恰好如此的**

参考资料

- Ehrenfest, P. (1917). **I****F**what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?**P**roc. Amsterdam Acad., 20, 200-209.
- Barrow, J. D. & Tipler, F. J. (1986). The Anthropic Cosmological Principle. Oxford University Press.
- Tegmark, M. (1997). **O****F**the dimensionality of spacetime.**E**lass. Quantum Grav., 14, L69-L75.